INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

El cálculo generalizado y las funciones fraccionarias

TESIS

que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Rafael Prieto Curiel

MÉXICO, D.F. 2009

El cálculo generalizado y las funciones fraccionarias

Rafael Prieto Curiel

Agradecimientos

A mi mamá y a mi hermano,
juntos los tres mosqueteros.

A mis abuelas.

A mi familia.

A mis amigos.

A mis profesores.

A Marianito.

A mis sinodales,
Nelia, Rafael y Juan Carlos.

A Papá.

Resumen

El cálculo fraccionario es una generalización del cálculo en la cual se utiliza el orden de un operador diferencial y se definen expresiones con derivadas e integrales de orden fraccionario.

El presente trabajo expone una breve introducción a los conceptos del cálculo fraccionario como la integral fraccionaria, la derivada fraccionaria y un problema con valor inicial fraccionario y se muestra una aplicación del cálculo fraccionario para resolver el problema de la tautócrona y una generalización de éste.

Se generalizan funciones como la exponencial o funciones trigonométricas al partir de un problema con valor inicial fraccionario y por último se utilizan esas definiciones de funciones fraccionarias en sistemas de ecuaciones diferenciales y se definen funciones matriciales que generalizan y resuelven sistemas diferenciales fraccionarios.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El cálculo es sin duda una de las herramientas más poderosas y más utilizadas de las matemáticas; gracias al cálculo podemos entender problemas de toda clase: físicos, económicos, financieros, químicos, biológicos, por nombrar algunos. Al cálculo le debemos la conexión que establecemos entre conceptos como tangencia, curvatura y concavidad con las ideas de crecimiento, velocidad y aceleración, etc. y poder formular matemáticamente problemas y en algunos casos, establecer una solución.

Los dos grandes pilares del cálculo son la derivada y su operación inversa, la integral, conceptos desarrollados paralelamente por Newton[1] y por Leibniz[2] a fines del siglo XVII y es gracias al Teorema Fundamental del Cálculo que hacemos la conección entre estos dos pilares.

Matemáticamente definimos la derivada de una función $f(t)$ en un punto t como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

si el límite existe, y por otro lado integrar consiste en encontrar una función $F(t)$ tal que al derivarla se obtenga la función original $f(t)$.

Podemos definir un operador diferointegral del espacio de funciones Ξ y de los enteros $\mathbb{Z}$ al espacio de funciones

$$\mathbf{D} : \Xi \times \mathbb{Z} \longmapsto \Xi$$

definido como

[1]Sir Isaac Newton, (1642-1727).

[2]Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646-1716).

$$\mathbf{D}^k\, f(t) = \begin{cases} \frac{d^k}{dt^k} f(t) & \text{si } k > 0 \\ \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k\,veces} f(t)\,dt\,dt\ldots dt & \text{si } k < 0 \\ f(t) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

un operador lineal en las funciones (dado que derivar e integrar son operadores lineales) y que cumple que

$$\mathbf{D}^k \left[\mathbf{D}^j\, f(t)\right] = \mathbf{D}^{k+j}\, f(t)$$

si ambas k y j son positivas, negativas o si j es negativo y k positivo.

El cálculo fraccionario es una generalización del cálculo, en la cual se busca extender el concepto de derivación y de integración de una función, y extender la definición del operador diferointegral $\mathbf{D}$ a números racionales, irracionales e inclusive complejos.

1.1. Requisitos de un operador fraccionario

Se definirá un operador fraccionario

$$\mathbf{D}^\nu\, f(t)$$

y se considerará siempre que ν es un número real. Se busca que el operador cumpla ciertos requisitos para que tenga sentido llamarlo operador diferointegral de orden fraccionario. Estos requisitos serán:

- Si $\nu = n$, un número natural, entonces se busca que

  $$\mathbf{D}^n\, f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

  es decir, que coincida con la derivada usual.

- Si $\nu = -n$, un entero negativo, entonces

  $$\mathbf{D}^{-n}\, f(t) = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n\,veces} f(t)\,dt\,dt\ldots dt,$$

  es decir, que si es un entero negativo sea la n-ésima integral iterada de la función.

- Si $\nu = 0$, entonces
$$\mathbf{D}^0\, f(t) = f(t).$$
- Que cumpla de alguna manera la propiedad de semigrupo, es decir, que si tenemos ν, $\mu \in \mathbb{R}$, entonces
$$\mathbf{D}^\nu\, [\mathbf{D}^\mu\, f(t)] = \mathbf{D}^{\nu+\mu}\, f(t).$$
Respecto a esta propiedad, es importante recordar que la derivada e integral de orden entero no siempre cumplen esta propiedad: la derivada es el operador inverso por la izquierda de la integral pero no por la derecha, por lo que esta propiedad tendrá algunas restricciones.

1.2. Un primer acercamiento

Un primer ejemplo de lo que es el cálculo fraccionario lo podemos ver con la función exponencial. Si vemos que, sin importar el signo de k y para alguna $c \neq 0$,
$$\mathbf{D}^k\, e^{ct} = c^k e^{ct},$$
podríamos entonces generalizar que para algún número real ν
$$\mathbf{D}^\nu\, e^{ct} = c^\nu e^{ct}.$$

Inclusive, utilizando la misma idea
$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\nu+i\mu}\, e^{ct} &= c^{\nu+i\mu} e^{ct} \\ &= c^\nu \left[e^{i\mu\log(c)}\right] e^{ct} \\ &= c^\nu \left[\cos(\mu\log(c)) + i\,\mathrm{sen}(\mu\log(c))\right] e^{ct}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si buscamos generalizar el operador en un polinomio, vemos que si $k \leq n$
$$\mathbf{D}^k\, t^n = \frac{n!t^{n-k}}{(n-k)!},$$
una fórmula que sirve tanto para derivar como para integrar t^n. Gracias a la función[3]
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{z-1}\, d\tau$$

[3] Las funciones especiales que se utilizarán están en el Apéndice (C)

podemos generalizar el término factorial que aparece en el denominador, pues sabemos que si k es un número natural, entonces $\Gamma(k+1) = k!$, por lo que podemos escribir

$$\mathbf{D}^k\, t^n = \frac{n!t^{n-k}}{\Gamma(n-k+1)}$$

y utilizar esta fórmula para generalizar

$$\mathbf{D}^\nu\, t^n = \frac{n!t^{n-\nu}}{\Gamma(n-\nu+1)}.$$

Un punto interesante de la función Γ es que si k es un entero negativo o cero, entonces

$$\lim_{h\to 0} \Gamma(k+h) = \pm\infty$$

por lo que concluímos que la fórmula funciona bien inclusive para potencias enteras de ν y valores de $\nu \geq n$.

Gracias a esta fórmula podríamos concluir que si tenemos una función definida en términos de una serie de potencias y utilizando la linealidad del operador, entonces tenemos definida la derivada fraccionaria de esa función. Sin embargo, aplicando esta idea a la función exponencial, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^\nu\, e^{ct} &= \mathbf{D}^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ct)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^j t^{j-\nu}}{\Gamma(j-\nu+1)} \\
&= \frac{1}{t^\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ct)^j}{\Gamma(j-\nu+1)} \\
&= \frac{1}{t^\nu} E_{1,1-\nu}(ct),
\end{aligned}$$

la función de Mittag-Leffler [4] de dos parámetros.Vemos que las dos formas de derivar fraccionariamente la función exponencial no coinciden, por lo que hay algún problema con el operador diferencial que hemos definido, además, tener

[4]La función de Mittag-Leffler, definida por G. M. Mittag-Leffler como $E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$ es una generalización de la función exponencial que tiene importantes aplicaciones en el cálculo fraccionario.

el operador definido únicamente para funciones definidas como una serie es muy restrictivo y no indica como actúa el operador en una función general.

Para generalizar el cálculo a órdenes no enteros hay dos enfoques, uno que parte de la derivada y que generaliza el concepto de derivada visto como límite, y otro que parte de la integral iterada de una función.

1.3. Un operador diferointegral en general

Hemos definido el operador $\mathbf{D}^{-1} f(t)$ como la antiderivada de una función, pero gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, lo podemos ver como

$$\mathbf{D}^{-1} f(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau,$$

y al integrar más veces la función, llegamos a que

$$\mathbf{D}^{-2} f(t) = \int_0^t \mathbf{D}^{-1} f(\tau)\, d\tau = \int_0^t \int_0^\tau f(s)\, ds\, d\tau,$$

la cual es una expresión en la cual podemos intercambiar las integrales gracias al Teorema de Fubini, llegando a la expresión:

$$\mathbf{D}^{-2} f(t) = \int_0^t \int_s^t f(s)\, d\tau\, ds = \int_0^t f(s) \int_s^t d\tau\, ds = \int_0^t f(s)(t-s)\, ds.$$

Si seguimos este proceso de intercambiar las integrales, podemos llegar a una expresión conocida como la fórmula de Cauchy para integrales iteradas, con la cual una forma generalizada de escribir la n-ésima integral es

$$\mathbf{D}^{-n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Vemos que esta fórmula puede aceptar valores no enteros de n si cambiamos el término $(n-1)!$ por $\Gamma(n)$ y escribimos la fórmula de Cauchy para integrales como

$$\mathbf{D}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Esta será el primer operador integral fraccionario definido para una función general. Se trabajará con este operador para definir la derivada de orden fraccionario y tener así definido el operador diferointegral por completo.

1.4. Un poco de historia

La historia del cálculo fraccionario es prácticamente tan antigua como la del cálculo mismo. Entre las cartas que se escribían Leibniz y L'Hôpital, ya se mencionaba la pregunta de qué significado se le podría dar a la media derivada de una función. Probablemente la primera aplicación del cálculo fraccionario fue hecha por Niels Henrik Abel en 1823 al resolver el problema de la tautócrona o isócrona.

Grandes matemáticos hicieron aportes al cálculo fraccionario, como Liouville, Riemann, Cayley o Grünwald. Hasta la segunda mitad del siglo pasado se consideraba el cálculo fraccionario como un objeto puramente matemático y sin aplicaciones reales más que algunos problemas un tanto artificiales.

En épocas más recientes ha recibido mucha atención por parte de no sólamente matemáticos, sino también ingenieros, físicos, químicos e incluso biólogos. El primer congreso de cálculo fraccionario se realizó en la década de 1970 y actualmente hay muchas personas que dedican su investigación al estudio del cálculo fraccionario y sus aplicaciones.

Entre sus aplicaciones se encuentran modelos de viscoelasticidad y de ecuaciones de difusión, teoría de circuitos eléctricos, teoría de control y algunos modelos biológicos y neurológicos.

Capítulo 2

Integral de orden fraccionario

Definimos la *integral fraccionaria* (o la *integral de Riemann-Liouville*) de orden $\nu \geq 0$ de una función $f(t)$ sobre $[a,t]$ como

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-\nu} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau & \text{si } \nu > 0, \\ f(t) & \text{si } \nu = 0. \end{cases}
$$

Es fácil comprobar gracias a la fórmula de Cauchy para integrales iteradas que cuando ν es un número natural coincide con la integral usual. Los límites a y t de la integral son llamados *terminales*. En algunos casos el intervalo de integración es $(-\infty, t]$, en cuyo caso será llamada *integral de Liouville*. En el caso cuando el intervalo de integración sea $[t, \infty)$, se llamará *integral de Weyl*. Sin embargo, en esta tesis solamente consideraremos la integral de Riemann-Liouville con $a = 0$. Para facilitar la notación, escribiremos $\mathbf{D}^{-\nu} f(t)$ en lugar de ${}_0\mathbf{D}_t^{-\nu} f(t)$ donde $t \geq 0$.

El operador $\mathbf{D}^{-\nu}$ lo hemos definido únicamente para integrales y es importante notar que no funciona para derivar una función y calcular una derivada fraccionaria no será únicamente cambiar el signo en la ecuación. Está claro que la integral fraccionaria es un operador lineal. A continuación mostraremos algunas otras propiedades de esta integral. Supondremos que las funciones son tales que las integrales existen y que $\mu, \nu > 0$.

2.1. Algunas propiedades

(i) Propiedad de semigrupo, es decir, $\mathbf{D}^{-\nu}\left[\mathbf{D}^{-\mu} f(t)\right] = \mathbf{D}^{-(\nu+\mu)} f(t)$, y se puede demostrar al hacer

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-\nu}\left[\mathbf{D}^{-\mu} f(t)\right] &= \mathbf{D}^{-\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} f(\tau)\,d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\tau (\tau-s)^{\mu-1} f(s)\,ds\right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_0^t\int_0^\tau (t-\tau)^{\nu-1}(\tau-s)^{\mu-1} f(s)\,ds\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_0^t\int_s^t (t-\tau)^{\nu-1}(\tau-s)^{\mu-1} f(s)\,d\tau\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_0^t f(s)\left[\int_s^t (t-\tau)^{\nu-1}(\tau-s)^{\mu-1}\,d\tau\right] ds.
\end{aligned}$$

Al hacer un cambio de variable de $u = (\tau - s)/(t-s)$, obtenemos que la integral de adentro se puede cambiar por

$$\begin{aligned}
\int_s^t (t-\tau)^{\nu-1}(\tau-s)^{\mu-1}\,d\tau &= \int_0^1 (t-s)^{\nu+\mu-1} u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1}\,du \\
&= (t-s)^{\nu+\mu-1}\int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1}\,du \\
&= (t-s)^{\nu+\mu-1}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)},
\end{aligned}$$

lo cual se obtiene al integrar la función beta[1] $B(\nu,\mu)$. Al sustituir este resultado llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-\nu}\left[\mathbf{D}^{-\mu} f(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_0^t f(s)(t-s)^{\nu+\mu-1}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu+\mu)}\int_0^t f(s)(t-s)^{\nu+\mu-1}\,ds \\
&= \mathbf{D}^{-(\nu+\mu)} f(t).
\end{aligned}$$

(ii) Conmutatividad, es decir,

$$\mathbf{D}^{-\nu}\left[\mathbf{D}^{-\mu} f(t)\right] = \mathbf{D}^{-\mu}\left[\mathbf{D}^{-\nu} f(t)\right],$$

[1] Apéndice C

lo cual se sigue de la propiedad anterior.

(iii) Si f es una función analítica en $t > 0$, entonces $\mathbf{D}^{-\nu} f(t)$ es un operador continuo respecto a ν, es decir,

$$\lim_{\mu \to \nu} \mathbf{D}^{-\mu} f(t) = \mathbf{D}^{-\nu} f(t).$$

Gracias a la propiedad (i), basta demostrar que

$$\lim_{\nu \to 0^+} \mathbf{D}^{-\nu} f(t) = f(t).$$

Para comprobarlo, vemos que si f es analítica en t, entonces en una vecindad de t, tenemos que

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t-\tau)^k,$$

donde $\alpha_0 = f(t)$, $\alpha_1 = f'(t)$ y en general $\alpha_k = f^{(k)}(t)/k!$. Vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-\nu} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t-\tau)^k \, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1+k}\, d\tau \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{(t-\tau)^{\nu+k}}{\nu+k} \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\nu+k} t^{\nu+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\Gamma(\nu+1)+k\Gamma(\nu)} t^{\nu+k}.
\end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $\nu \to 0^+$, dado que $\Gamma(0)$ toma un valor infinito, la única parte de la suma que tomará un valor distinto de cero será cuando $k = 0$, por lo que

$$\lim_{\nu \to 0^+} \mathbf{D}^{-\nu} f(t) = \lim_{\nu \to 0^+} \frac{\alpha_0 t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \alpha_0 = f(t)$$

y concluimos que el operador es continuo respecto al orden de la integral.

2.2. Ejemplos

(i) Sea $f(t) = 1$. Se puede ver que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-\nu}\, 1 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}\, d\tau \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\nu)} \left. \frac{(t-\tau)^{\nu}}{\nu} \right|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu}.
\end{aligned}$$

(ii) Sea $f(t) = t^{\alpha}$ con $\alpha > -1$. Haremos un cambio de variable $u = \tau/t$ dentro de la integral y vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-\nu}\, t^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \tau^{\alpha}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (t-ut)^{\nu-1} (ut)^{\alpha} t\, du \\
&= \frac{t^{\nu+\alpha}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 u^{\alpha} (1-u)^{\nu-1}\, du,
\end{aligned}$$

que es una función beta $B(\nu, \alpha+1)$, por lo que llegamos a que

$$\mathbf{D}^{-\nu}\, t^{\alpha} = \frac{t^{\nu+\alpha}}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} t^{\nu+\alpha}.$$

Vemos que en el caso de una potencia entera, $\alpha = n$, se llega a que

$$\mathbf{D}^{-\nu}\, t^{n} = \frac{n!}{\Gamma(\nu+n+1)} t^{\nu+n}$$

y que inclusive la fórmula coincide con la del ejemplo anterior cuando $n = 0$. Observemos que gracias a esta fórmula y a la linealidad del operador, podemos calcular la integral fraccionaria de cualquier polinomio.

(iii) Sea $f(t) = e^{at}$ con $a > 0$. Usando la serie de Maclaurin de la función exponencial y los ejemplos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-\nu}\, e^{at} &= \mathbf{D}^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{k! t^{k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)} \\
&= t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} \\
&= t^{\nu} E_{1,\nu+1}(at),
\end{aligned}$$

la cual es una potencia fraccionaria multiplicada por la función de Mittag-Leffler.

2.3. Existencia de la integral de orden fraccionario

A continuación consideraremos el problema de la existencia de la integral de orden fraccionario de una función. Supongamos que f es continua en $[0,\infty)$ y fijemos $\nu, t > 0$. Si definimos la función

$$g(\tau) = -\frac{(t-\tau)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

entonces

$$g'(\tau) = \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$$

y por lo tanto g es creciente en $[0,t]$. Entonces la integral de orden fraccionario se puede expresar como una integral de Riemann-Stieltjes:

$$\mathbf{D}^{-\nu}\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, dg(\tau).$$

La continuidad de f y la monotonicidad de g implica que esta integral existe para toda $t > 0$.

2.4. La integral fraccionaria vista como la convolución entre funciones

Puede ser de gran utilidad para descubrir otras propiedades de la integral de orden fraccionario expresarla de otras formas. Una de ellas es utilizando la convolución entre funciones. Definimos la *convolución* $f * g$ entre dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau.$$

Ahora buscamos expresar la integral de orden fraccionario como la convolución entre dos funciones, y para ello definimos la función

$$\Phi_\nu(t) = \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad t > 0.$$

Entonces

$$\mathbf{D}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau = (\Phi_\nu * f)(t).$$

Capítulo 3

Derivada de orden fraccionario

Hasta ahora únicamente hemos definido la integral de orden fraccionario. Para definir la derivada no es sólo cuestión de cambiar el signo a nuestra definición, pues se llegará a una integral que en general no converge, además de que la función Γ no converge en los enteros negativos, de donde no coincidirá con la definición usual de derivada. Para definir la derivada de orden arbitrario, buscamos que coincida con la derivada usual en el caso en el que el orden sea un entero y para ello se define en términos de la integral fraccionaria.

Tendremos dos definiciones de la derivada, las cuales no serán equivalentes. Suponiendo siempre que $\nu \geq 0$, utilizaremos $\mathbf{D}^{\nu}$ para denotar la derivada fraccionaria mientras $\mathbf{D}^{-\nu}$ denotará la integral fraccionaria.

3.1. Derivada de orden ν por la izquierda.

Sea n el número natural que cumpla que $n-1 < \nu \leq n$. Entonces se define la *derivada de Riemann-Liouville* como

$$\mathbf{D}^{\nu} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{D}^{-(n-\nu)} f(t).$$

Cuando ν es un número entero positivo, entonces $\nu = n$ y

$$\mathbf{D}^{n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{D}^{0} f(t) = f^{(n)}(t).$$

Por lo tanto, coincide con la derivada de orden entero.

3.2. Derivada de orden ν por la derecha

Esta derivada también es llamada la *derivada de Caputo*, y será diferenciada de la derivada por la izquierda con el símbolo ${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}$, y al igual que en la definición anterior, si tenemos $n-1<\nu\leq n$, entonces la derivada por la derecha es

$$ {}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\, f(t) = \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{d^n}{dt^n} f(t). $$

Es sencillo comprobar que también con esta definición de derivada, si ν es un entero positivo, entonces $\nu = n$ y

$$ {}^{C}\mathbf{D}^{n}\, f(t) = f^{(n)}(t). $$

Veremos que en general las dos definiciones de derivada no coindicen y presentan radicales diferencias. Pero es importante notar que en ambas definiciones, la parte fraccionaria de la definición es únicamente mediante la integral que se realiza (ya sea antes o después de derivar) y que la integral que se hace es siempre de orden menor que uno, pues siempre se cumple que $n-\nu<1$.

3.3. Ejemplos

(i) Sea $f(t) = 1$. Vemos que

$$ \mathbf{D}^{\nu}\, 1 = \frac{d^n}{dt^n}\, \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, 1 = \frac{d^n}{dt^n} \frac{t^{n-\nu}}{\Gamma(n-\nu+1)} = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, $$

una función no nula. Si por otro lado calculamos la derivada de Caputo de orden ν, llegamos a

$$ {}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\, 1 = \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{d^n}{dt^n} 1 = 0. $$

Vemos con un ejemplo que el resultado de las dos definiciones no siempre coincide.

(ii) Sea $f(t) = t^{\alpha}$ con $\alpha > -1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\nu}\, t^{\alpha} &= \frac{d^n}{dt^n}\, \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, t^{\alpha} \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-\nu+1)} t^{\alpha+n-\nu} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-\nu+1)} \frac{\Gamma(\alpha+n-\nu+1)}{\Gamma(\alpha-\nu+1)} t^{\alpha-\nu} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\nu+1)} t^{\alpha-\nu}.
\end{aligned}$$

Podemos obtener dos resultados interesantes de esta fórmula. El primero es cuando $\nu = \alpha$, de donde se llega a que

$$\mathbf{D}^{\alpha}\, t^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1),$$

una constante. El segundo resultado es cuando $\nu = \alpha + k$ con $k \in \mathbb{N}$, en el que se obtiene

$$\mathbf{D}^{\alpha+k}\, t^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1-k)} t^{-k} = 0.$$

Ahora, calculando la derivada de Caputo de t^m con $m \in \mathbb{N}$, se llega a

$${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\, t^m = \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{d^n}{dt^n} t^m,$$

y tenemos dos distintos casos: si $n > m$ vemos que la derivada será cero por lo que la integral fraccionaria también tomará el valor de cero. Por otro lado, si $n \leq m$, llegamos a

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\, t^m &= \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} \\
&= \frac{m!}{(m-n)!} \frac{\Gamma(m-n+1) t^{m-n+n-\nu}}{\Gamma(n-\nu+m-n+1)} \\
&= \frac{m! t^{m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)},
\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\, t^m = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu > m, \\ \dfrac{m! t^{m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)} & \text{si } \nu \leq m. \end{cases}$$

Generalizando esta fórmula para ${}^C\mathbf{D}^\nu\, t^\alpha$, donde $\alpha \neq 0, 1, 2\ldots$ y tomando $\nu < \alpha$, obtenemos

$$\begin{aligned}
{}^C\mathbf{D}^\nu\, t^\alpha &= \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{d^n}{dt^n} t^\alpha \\
&= \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{\Gamma(\alpha+1) t^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} \frac{\Gamma(\alpha-n+1) t^{\alpha-n+n-\nu}}{\Gamma(\alpha-n+n-\nu+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1) t^{\alpha-\nu}}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}.
\end{aligned}$$

Podemos observar que el resultado de las dos derivadas de t^α tomando α suficientemente grande sí coincide. Posteriormente obtendremos condiciones sobre una función para garantizar que ambas derivadas coinciden.

(iii) Sea $f(t) = e^{at}$ con $a > 0$. Entonces si $\nu < 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^\nu\, e^{at} &= \mathbf{D}^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}^\nu\, \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\nu)} t^{k-\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(k+1-\nu)} t^{k-\nu} \\
&= \frac{1}{t^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1-\nu)} \\
&= \frac{1}{t^\nu} E_{1,1-\nu}(at),
\end{aligned}$$

de nuevo, una función de Mittag-Leffler. Por otro lado, vemos que (además de ser más sencilla de calcular) que

$$\begin{aligned}
{}^C\mathbf{D}^\nu\, e^{at} &= \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, \frac{d^n}{dt^n} e^{at} \\
&= \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, a^n e^{at} \\
&= a^n t^{n-\nu} E_{1,n-\nu+1}(at).
\end{aligned}$$

3.4. Propiedades de la derivada fraccionaria

Ahora veremos algunas propiedades de las dos definiciones de derivada. Notemos en primer lugar que $\mathbf{D}^{\nu}$ también se puede expresar en una manera simplificada como $\mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-\rho}$, donde $\rho = n-\nu$ y se cumple que $n-1<\nu\leq n$ con n entero, y de la misma manera ${}^{C}\mathbf{D}^{\nu} = \mathbf{D}^{-\rho}\ \mathbf{D}^{n}$.

(i) Ambos operadores $\mathbf{D}^{-\rho}$ y $\mathbf{D}^{n}$ son lineales, de donde se sigue que $\mathbf{D}^{\nu}$ y ${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}$ también lo son.

(ii) La derivada de Riemann-Liouville es el operador inverso de la integral. Para ello consideramos la expresión

$$\mathbf{D}^{\nu}\left[\mathbf{D}^{-\nu} f(t)\right],$$

que se expresa de la manera

$$\mathbf{D}^{\nu}\left[\mathbf{D}^{-\nu} f(t)\right] = \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\left[\mathbf{D}^{-\nu} f(t)\right].$$

Por la propiedad de semigrupo de la integral, llegamos a que

$$\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{D}^{-\nu} f(t) = \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)-\nu} f(t) = \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-n} f(t),$$

una expresión de orden entero, en la cual sabemos que son operadores inversos, de donde

$$\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{D}^{-\nu} f(t) = f(t).$$

Concluimos que la derivada de Riemann-Liouville de orden fraccionario, al igual que en el cálculo entero, es el operador inverso por la izquierda de la integral.

(iii) Buscamos probar si cumplen la propiedad de semigrupo.

Para la derivada de Riemann-Liouville buscamos si se cumple que

$$\mathbf{D}^{\mu}\left[\mathbf{D}^{\nu} f(t)\right] = \mathbf{D}^{\mu+\nu} f(t).$$

Para ello expresamos $\mathbf{D}^{\nu} = \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}$ y también $\mathbf{D}^{\mu} = \mathbf{D}^{m}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}$ con $n-1<\nu\leq n$ y $m-1<\mu\leq m$. Usando esa expresión llegamos que

$$\mathbf{D}^{\mu}\ \mathbf{D}^{\nu} = \mathbf{D}^{m}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}$$

y por otro lado

$$\mathbf{D}^{\mu+\nu} = \mathbf{D}^{m}\ \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\,.$$

Al ver esas dos expresiones, se observa que la propiedad que estamos buscando es saber si

$$\mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{n} = \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\,.$$

Para comprobarlo, integramos por partes la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-(m-\mu)}\, f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\mu-1} f(\tau)\,d\tau \\
&= -\frac{(t-\tau)^{m-\mu} f(\tau)}{(m-\mu)\Gamma(m-\mu)}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&\quad + \frac{1}{(m-\mu)\Gamma(m-\mu)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\mu} f'(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{f(0)t^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(m-\mu+1)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\mu} f'(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{f(0)t^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu+1)} + \mathbf{D}^{-(m+1-\mu)}\, f'(t),
\end{aligned}$$

y al seguir el mismo proceso n veces, llegaremos a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-(m-\mu)}\, f(t) &= \frac{f(0)t^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu+1)} + \mathbf{D}^{-(m+1-\mu)}\, f'(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)t^{m-\mu+k}}{\Gamma(m-\mu+1+k)} + \mathbf{D}^{-(m+n-\mu)}\, f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)t^{m-\mu+k}}{\Gamma(m-\mu+1+k)} + \mathbf{D}^{-(m+n-\mu)}\ \mathbf{D}^{n}\, f(t).
\end{aligned}$$

Además, por la propiedad de semigrupo de la integral, el último término se puede expresar como $\mathbf{D}^{-n}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{n}\, f(t)$, por lo que, al derivar n veces la expresión anterior y tomando en cuenta que la derivada es el operador inverso por la izquierda de la integral, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^n\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ f(t) &= \mathbf{D}^n\ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)t^{m-\mu+k}}{\Gamma(m-\mu+1+k)} \\
&\quad + \mathbf{D}^n\ \mathbf{D}^{-(m+n-\mu)}\ \mathbf{D}^n\ f(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{D}^n\ \frac{f^{(k)}(0)t^{m-\mu+k}}{\Gamma(m-\mu+1+k)} \\
&\quad + \mathbf{D}^n\ \mathbf{D}^{-n}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^n\ f(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)t^{m-\mu+k-n}}{\Gamma(m-\mu+1+k-n)} \\
&\quad + \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^n\ f(t).
\end{aligned}$$

Llegamos entonces a la conclusión que

$$\mathbf{D}^{\mu}\ [\mathbf{D}^{\nu}\ f(t)] = \mathbf{D}^{\mu+\nu}\ f(t)$$

únicamente si todos los términos dentro de la suma son iguales a cero en toda t, lo cual se cumple sólo si la función f es tal que $f^{(k)}(0) = 0$ con $k = 0, 1 \ldots n$. Funciones de esta clase son por ejemplo funciones de la forma

$$f(t) = t^{n+1} g(t),$$

donde $g(t)$ es una función n veces derivable.

En el caso de la derivada de Caputo estamos buscando si se cumple que ${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{D}^{\mu}\ f(t) = {}^{C}\mathbf{D}^{\nu+\mu}\ f(t)$, que lo podemos expresar como

$${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{D}^{\mu} = \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\ \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{m}$$

y por otro lado

$${}^{C}\mathbf{D}^{\nu+\mu} = \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{m}$$

así que, al igual que con la derivada de Riemann-Liouville, buscamos que

$$\mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(m-\mu)} = \mathbf{D}^{-(m-\mu)}\ \mathbf{D}^{n}\ ,$$

por lo que la conclusión es la misma.

En ambos casos vemos que la propiedad de semigrupo se cumple si la función cumple que[1]

$$\mathbf{D}^{n-m+\mu}\, f(t) = {}^{C}\mathbf{D}^{n-m+\mu}\, f(t).$$

(iv) Calcular el kernel de $\mathbf{D}^{\nu}$, es decir, buscamos funciones que cumplan que $\mathbf{D}^{\nu}\, f(t) = 0$. Para ello expresamos

$$\mathbf{D}^{\nu}\, f(t) = \mathbf{D}^{n}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, f(t),$$

lo cual es cero sólo si

$$\mathbf{D}^{-(n-\nu)}\, f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1},$$

un polinomio de grado $n-1$, así que al aplicar el operador inverso por la izquierda, es decir, la derivada de orden $n-\nu$, llegamos a que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{D}^{n-\nu} \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \mathbf{D}^{n-\nu}\ t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^{k-(n-\nu)} \\ &= t^{\nu-n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k, \end{aligned}$$

el cual es una función de la forma

$$f(t) = b_0 t^{\nu-n} + b_1 t^{\nu-n+1} + \cdots + b_{n-1} t^{\nu-1}.$$

Si por otro lado calculamos el kernel de ${}^{C}\mathbf{D}^{\nu}$ buscamos funciones que cumplan que

$$\mathbf{D}^{-(n-\nu)}\ \mathbf{D}^{n}\, f(t) = 0$$

y aplicando el operador inverso por la izquierda de la integral (la derivada de Riemann-Liouville), llegamos a que

$$\mathbf{D}^{n}\, f(t) = \mathbf{D}^{n-\nu}\, 0 = 0.$$

[1] Apéndice B.

Al integrar n veces concluimos que

$$f(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1} t^{n-1},$$

un polinomio de grado $n-1$.

3.5. Regla de Leibniz para el producto de funciones

Una sencilla forma de deducir la regla de Leibniz en el cálculo tradicional es calcular primero la derivada del producto de dos funciones, y llegar a que

$$(fg)' = f'g + g'f,$$

y a partir de esa definición, seguir inductivamente a la fórmula:

$$\frac{d^n}{dt^n}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

Necesitamos, para generalizar esa fórmula al cálculo fraccionario, resolver dos detalles: el término binomial y el límite de la suma. Generalizar el término binomial no es complicado, al sustituir

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{k!\Gamma(n-k+1)}.$$

Por otro lado, el término superior de la suma se reemplazará por ∞, y una deducción detallada del por qué se hace ese remplazo se puede encontrar en Podlubny [1]. Llegamos a la *regla de Leibniz generalizada*, la cual será

$$\mathbf{D}^{\nu}\ (fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)} \left(\mathbf{D}^{\nu-k}\ f(t)\right) g^{(k)}(t).$$

Una interesante observación es que, al igual que en todas las definiciones que hemos obtenido en el cálculo fraccionario, cuando se hace una derivada entera entonces la fórmula coincide con la regla de Leibniz usual. Lo podemos notar pues $\Gamma(n-k+1)$ tomará un valor infinito cuando k sea mayor que n, por lo que la serie se puede escribir como una suma finita.

Podemos además utilizar la regla de Leibniz generalizada para calcular la derivada fraccionaria de una función f de clase C^∞ al ver que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^\nu f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)} \left(\mathbf{D}^{\nu-k}\, 1\right) f^{(k)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(1-\nu+k)} f^{(k)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1) t^{k-\nu} f^{(k)}(t)}{k!\Gamma(1+\nu-k)\Gamma(1-\nu+k)}.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

si z no es entero, por lo que, asumiendo que estamos haciendo una derivada fraccionaria y no entera, escribimos

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^\nu f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1) \operatorname{sen}\pi(\nu-k) t^{k-\nu} f^{(k)}(t)}{k!\pi(\nu-k)} \\
&= \sum_{k=0, k\neq n}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1) \operatorname{sen}\pi(\nu-k) t^{k-\nu} f^{(k)}(t)}{k!\pi(\nu-k)} \\
&\quad + \frac{\Gamma(n+1) \operatorname{sen}\pi(\nu-n) t^{n-\nu} f^{(n)}(t)}{n!\pi(\nu-n)} \\
&= \sum_{k=0, k\neq n}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1) \operatorname{sen}\pi(\nu-k) t^{k-\nu} f^{(k)}(t)}{k!\pi(\nu-k)} + \frac{\operatorname{sen}\pi(\nu-n) t^{n-\nu} f^{(n)}(t)}{\pi(\nu-n)}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\nu \to n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to n} \mathbf{D}^\nu f(t) &= \sum_{k=0, k\neq n}^{\infty} \frac{n! \operatorname{sen}\pi(n-k) t^{k-n} f^{(k)}(t)}{k!\pi(n-k)} + f^{(n)}(t) \\
&= f^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

3.6. Derivadas fraccionarias complejas

Para una función compleja de una variable real, podemos definir la derivada fraccionaria como sigue. Si

$$f(t) = u(t) + iw(t)$$

en donde ambas u y w son funciones reales, definimos entonces la derivada de orden fraccionario como

$$\mathbf{D}^{\nu}\, f(t) = \mathbf{D}^{\nu}\, u(t) + i\, \mathbf{D}^{\nu}\, w(t).$$

También se puede dar una definición análoga para la derivada de Caputo.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales

Decimos que una ecuación es *diferencial* si una función está referida mediante alguna(s) de su(s) derivada(s) y tal vez ella misma. Llamaremos a una ecuación diferencial *de n-ésimo orden* por ser la derivada de orden n la más grande de la ecuación y suponemos que se puede expresar de la forma:

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)),$$

en donde t es la variable independiente, la cual usualmente representa el tiempo transcurrido desde algún tiempo fijo t_0. En general tomaremos $t \geq t_0 = 0$.

Debido a que al hacer el proceso inverso de la derivada —integrar— aparecen constantes de integración, por lo general habrá una infinidad de funciones que cumplan con la ecuación diferencial. Normalmente a la ecuación diferencial se le incorporan *condiciones iniciales* que nos marcan el estado en el que se encuentra el sistema en un tiempo determinado, lo que termina por fijar las constantes de integración. La manera más usual en que se expresan estas condiciones es con n ecuaciones de la forma

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes determinadas en el problema. Un *problema con valor inicial* consiste de una ecuación diferencial de orden n junto con n condiciones iniciales. Decimos que el problema está resuelto si logramos encontrar una función $y(t)$ que cumpla la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

Decimos que una ecuación diferencial es *de orden fraccionario* si al menos una de las derivadas que aparece es de orden fraccionario, y definiremos el *orden* de la ecuación diferencial fraccionaria como el menor entero mayor o igual que todas las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial. Por ejemplo, para

$$\mathbf{D}^{3/4}\, y(t) - 3\, \mathbf{D}^{1/4}\, y(t) = 0$$

diremos que es una ecuación diferencial fraccionaria de primer orden.

Al tratar el tema de ecuaciones diferenciales es de suma importancia hablar de las condiciones iniciales y de la interpretación que se les puede dar. Por ejemplo, al hacer una interpretación física de las condiciones iniciales, diríamos que $y(t)$ es la posición de una partícula al tiempo t y diríamos que $y'(t)$ y $y''(t)$ son la velocidad y aceleración de la partícula, respectivamente. Inclusive se puede hacer una interpretación geométrica de las condiciones, si nos referimos a la pendiente de la recta tangente a una cierta curva, o a la concavidad de la curva en un punto particular. Al trabajar con ecuaciones diferenciales fraccionarias aparecerán en algún sentido 'constantes de integración', las cuales se necesitarán fijar a partir de algunas condiciones iniciales. Estas condiciones iniciales dependerán mucho del tipo de derivada que estemos hablando, ya sea la de Riemann-Liouville o la de Caputo. Un punto importante que hay que mencionar es que a la derivada fraccionaria no se le ha dado una interpretación razonable.

Se considerarán dos tipos de condiciones iniciales:

$$\mathbf{D}^{\nu}\, y(t)\big|_{t=0},$$

con $\nu \in \mathbb{R}$, que es el tipo de condiciones iniciales que surgen al trabajar con la derivada de Riemann, y

$$y^{(k)}(0),$$

que es el tipo de condiciones que se utilizan con la derivada de Caputo. Un *problema con valor inicial fraccionario* consiste de una ecuación diferencial fraccionaria y de condiciones iniciales asociadas a la ecuación diferencial. Un ejemplo de problema con valor inicial fraccionario sería

$$\mathbf{D}^{3/4}\, y(t) - 3\, \mathbf{D}^{1/4}\, y(t) = 0, \quad \mathbf{D}^{-1/4}\, y(t)\Big|_{t=0} = y_0, \quad \mathbf{D}^{-3/4}\, y(t)\Big|_{t=0} = y_1,$$

donde y_0 y y_1 son constantes. Una solución a este problema con valor inicial fraccionario es

$$y(t) = \frac{y_0 - 3y_1}{t^{1/4}} E_{1/2,3/4}(3\sqrt{t}),$$

como se puede verificar al sustituir.

Existen diversos métodos para resolver una ecuación diferencial fraccionaria, como proponer que la solución sea una serie de potencias (tal vez con potencias no enteras, dependiendo del tipo de derivada y de las condiciones iniciales) y buscar alguna relación entre los coeficientes. Sin embargo, uno de los métodos más sencillos para resolver una ecuación diferencial fraccionaria es utilizando la transformada de Laplace. Posteriormente se calculará una relación entre las transformadas de Laplace de una función y sus derivadas fraccionarias.

4.1. El problema de la tautócrona

El problema de la tautócrona consiste en encontrar una curva por la cual una partícula se desliza sin fricción y es tal que, sin importar el punto de partida y empezando en reposo, llega a la parte inferior de la curva al mismo tiempo. Probablemente la solución a este problema fue una de las primeras ocasiones en que se resolvió de manera explícita una ecuación diferencial, por Jakob Bernoulli[1] en 1690 y se puede formular de la siguiente manera:

Supongamos que la partícula parte del punto $P = (a,b)$ y que la parte inferior de la curva es el origen, y que la curva:

$$(x(t), y(t))$$

será la solución. Queremos que la curva parta del punto P, por lo que al evaluar en $t = 0$ queremos que

$$(x(0), y(0)) = (a,b)$$

y buscamos que parta del reposo por lo que

$$\left(x'(0), y'(0)\right) = (0,0)$$

y esas serán las condiciones iniciales.

Sabemos que la longitud de la curva desde el punto P hasta el punto $(x(t), y(t))$ se puede expresar como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, d\tau$$

y al expresarla como una función de la altura y, se llega a

$$s(y) = \int_b^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

[1] Jakob Bernoulli, (1654-1705).

y llamamos a la razón de cambio de la longitud de la curva $f(y) = s'(y)$ y vemos que es

$$f(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

La partícula perderá energía potencial $E_P = mg(b-y)$ la cual se transformará en energía cinética $E_C = mv^2/2$ donde m es la masa de la partícula, g la aceleración de la gravedad y v la velocidad de la partícula. Por el principio de conservación de la energía, al igualar la energía potencial a la cinética, llegamos a que la velocidad de la partícula en alguna altura y es

$$v(y) = \sqrt{2g(b-y)}.$$

La partícula recorrerá infinitesimalmente una distancia dada por $f(y)$ a una velocidad $v(y)$ por lo que el tiempo total que le tomará a la partícula llegar del punto de partida al origen, al hacer la suma (integral) de todos los tiempos, será

$$t = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{2g(b-y)}}\, dy.$$

El objetivo del problema es que el tiempo sea constante para cualquier punto de partida b, es decir, buscamos la función $f(y)$ que nos expresa la razón de cambio de la longitud de la curva tal que

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\, dy = c\sqrt{2g} = c'$$

sea constante para cualquier b.

Para resolver la ecuación de una manera “tradicional”, podemos observar que la convolución entre la función $f(y)$ y la función $g(y) = y^{-1/2}$ nos queda

$$(f*g)(b) = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\, dy = c'$$

y al aplicar la transformada de Laplace llegamos a

$$\hat{f}(s)\hat{g}(s) = \frac{c'}{s}.$$

Al calular $\hat{g}(s)$ y despejar llegamos a que

$$\hat{f}(s) = \frac{c'}{\sqrt{\pi s}},$$

por lo que al calcular la transformada inversa, llegamos a que

$$f(y) = \alpha y^{-1/2}$$

con $\alpha = c'/\pi = c\sqrt{2g}/\pi$. Para calcular la función en el eje x vemos que

$$\alpha y^{-1/2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}$$

y al despejar

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - y}{y}}.$$

Si hacemos el cambio de variable $y(\theta) = \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= \left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)}}\right)\left(\alpha^2 \operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)\right) \\
&= \left(\sqrt{\cot^2(\theta/2)}\right)\left(\alpha^2 \operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)\right) \\
&= \alpha^2 \cos^2(\theta/2) \\
&= \frac{\alpha^2}{2}(\cos\theta + 1).
\end{aligned}$$

Al integrar y considerar las condiciones iniciales se obtiene

$$x(\theta) = \frac{\alpha^2}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta) + a, \quad y(\theta) = \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2) = \frac{\alpha^2}{2}(1 - \cos\theta) + b,$$

que es la forma paramétrica de una cicloide, la solución de nuestro problema.

4.1.1. Cálculo fraccionario y la tautócrona

Una de las primeras aplicaciones que se le encontró al cálculo fraccionario fue precisamente en encontrar la solución al problema de la tautócrona. Abel[2] utilizó técnicas de cálculo fraccionario en 1823 para resolver el problema.

[2] Niels Henrik Abel, (1802-1829).

Si de la deducción anterior nos fijamos en la ecuación

$$c' = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\,dy,$$

entonces podemos expresar el lado derecho como

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\,dy = \int_0^b (b-y)^{1/2-1} f(y)\,dy = \Gamma(1/2)\ {}_0\mathbf{D}_b^{-1/2}\ f(b).$$

Por lo tanto, buscamos que

$${}_0\mathbf{D}_y^{-1/2}\ f(y) = \frac{c'}{\Gamma(1/2)}.$$

Al aplicar el operador inverso por la izquierda (la derivada de orden $1/2$), llegamos a

$$f(y) = {}_0\mathbf{D}_y^{1/2}\ \frac{c'}{\Gamma(1/2)} = \frac{c\sqrt{2g}}{\Gamma(1/2)}\frac{y^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{c\sqrt{2g}}{\pi}y^{-1/2},$$

al igual que cuando lo resolvimos de manera tradicional.

De hecho, podemos usar técnicas de cálculo fraccionario para generalizar un poco el problema. Vimos que

$$f(y) = {}_0\mathbf{D}_y^{1/2}\ \frac{c\sqrt{2g}}{\Gamma(1/2)} = \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(1/2)}\ {}_0\mathbf{D}_y^{1/2}\ c.$$

Si sustituimos c, que es el tiempo constante en que se llegará al origen, por otra función $h(y)$, por ejemplo, $h(y) = y$, se estaría encontrando una curva en la que la altura inicial es el tiempo de caída. Se llega a una ecuación integral de la forma

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\,dy = h(b)$$

donde $f(y)$ es una función desconocida. En general una ecuación integral de la forma

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^b (b-y)^{\nu-1} f(y)\,dy = h(b)$$

es conocida como una *ecuación integral de Abel*, y la solución (si esta existe) es de la forma

$$f(y) = {}_0\mathbf{D}_y^{\nu}\ h(y)\ .$$

En el ejemplo en el que se busca una curva tal que el tiempo de caída sea la altura desde la que se deja caer la partícula, es decir, $h(y) = y$, la ecuación para poder encontrar x en función de y es

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(1/2)}\ {}_0\mathbf{D}_y^{\nu}\, h(y) \; = \frac{\sqrt{8gy}}{\pi}$$

de donde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{8g}}{\pi}\left(\sqrt{y - \frac{\pi^2}{8g}}\right).$$

Vemos que para alturas pequeñas (es decir, valores de $y < \pi^2/8g$) la curva no estará definida, por lo que no existe una solución a este problema. De hecho, para garantizar la existencia de una solución a un problema de la forma de la tautócrona, tenemos el siguiente resultado: Si $h(y)$ es tal que ${}_0\mathbf{D}_y^{1/2}\, h(y)$ existe en un intervalo $[0, y_0]$ y

$$\left[{}_0\mathbf{D}_y^{1/2}\, h(y)\right]^2 \geq \pi/2g$$

en ese intervalo, entonces el problema tendrá una solución en $[0, y_0]$, es decir, habrá una curva tal que el tiempo de caida sea $h(y)$. La demostración de esta afirmación es muy sencilla al utilizar conceptos de cálculo fraccionario. Aplicamos la derivada de orden $1/2$ en

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^b (b-y)^{\nu-1} f(y)\, dy = h(b)$$

y llegamos a

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(1/2)}\ {}_0\mathbf{D}_y^{\nu}\, h(y).$$

Despejando dx/dy podemos expresar que

$$x(y) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \int_0^y \sqrt{\left[{}_0\mathbf{D}_s^{1/2}\, h(s)\right]^2 - \frac{\pi}{2g}}\, ds.$$

Concluimos que la curva existe y el problema tiene una solución si los valores dentro de la raíz son siempre no negativos.

4.2. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria

Sin duda alguna, una de las herramientas más poderosas en el estudio de ecuaciones diferenciales es la transformada de Laplace. Gracias a la transformada logramos incorporar en una sola expresión la ecuación diferencial junto a las condiciones iniciales. Veremos que en el estudio de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, la transformada de Laplace es también una herramienta que nos permite incorporar los términos diferenciales junto con las condiciones iniciales.

Recordemos que la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es

$$\hat{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Formalmente, al integrar por partes n veces, podemos ver que

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

Ahora buscaremos una expresión similar en el caso de tener un operador fraccionario.

4.2.1. Transformada de Laplace de la derivada de Riemann

Como hemos visto anteriormente, un enfoque de la derivada de orden fraccionario es que

$$\mathbf{D}^{\nu} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{D}^{-(n-\nu)} f(t) = g^{(n)}(t)$$

donde

$$g(t) = \mathbf{D}^{-(n-\nu)} f(t).$$

Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados, vemos que

$$\mathscr{L}\{\mathbf{D}^{\nu} f(t)\} = \mathscr{L}\left\{g^{(n)}(t)\right\} = s^n \hat{g}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0).$$

Tenemos entonces que calcular la trasformada de la función $g(t)$ y establecer $g^{(k)}(0)$. Recordamos que, dado que la integral de orden fraccionario se puede establecer como la convolución entre la función $f(t)$ y la función $\Phi_{n-\nu}(t)$, entonces la transformada de $g(t)$ queda como

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\{(f * \Phi_{n-\nu})(t)\} = \frac{\hat{f}(s)}{s^{n-\nu}}.$$

Por otro lado, calcular $g^{(k)}(0)$, es lo mismo que calcular

$$\frac{d^k}{dt^k}\,\mathbf{D}^{-(n-\nu)}\,f(t) \text{ en } t=0,$$

lo cual es equivalente a calcular $\mathbf{D}^{\nu+k-n}\,f(t)\big|_{t=0}$ con $k = 0, 1 \ldots n-1$, es decir, como condiciones iniciales que son incorporadas por la transformada, necesitamos condiciones iniciales de orden fraccionario. Llegamos entonces a que

$$\mathscr{L}\{\,\mathbf{D}^{\nu}\,f(t)\} = s^{\nu}\hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\;\mathbf{D}^{\nu+k-n}\,f(t)\Big|_{t=0}$$

y al reindexar los términos de la suma, llegamos finalmente a que

$$\mathscr{L}\{\,\mathbf{D}^{\nu}\,f(t)\} = s^{\nu}\hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}\;\mathbf{D}^{\nu-k-1}\,f(t)\Big|_{t=0}.$$

4.2.2. Transformada de Laplace de la derivada de Caputo

De la misma manera en que calculamos la transformada anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{{}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\,f(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\mathbf{D}^{-(n-\nu)}\,\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} \\
&= \frac{f^{(n)}(t)}{s^{n-\nu}} \\
&= \frac{1}{s^{n-\nu}}\left[s^n\hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)\right] \\
&= s^{\nu}\hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Vemos que ambas definiciones no sólo no coinciden, sino que —y la principal diferencia— las condiciones iniciales que se requieren para la transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville son también de orden fraccionario, mientras que en la derivada de Caputo se tienen condiciones iniciales de orden entero.

4.3. La función exponencial fraccionaria

La función exponencial $x(t) = x_0 e^{at}$ con $x_0, a \in \mathbb{R}$ usualmente se define como la función inversa de la función logaritmo natural. Partiendo de esta definición, se puede demostrar que $x(t)$ satisface el problema con valor inicial

$$x'(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

Sin embargo, suponiendo que la existencia y unicidad de la solución del problema con valor inicial ya se ha demostrado, podemos definir la función exponencial como la única solución del problema anterior.

Buscaremos, de una manera similar, definir lo que llamaremos la función *exponencial fraccionaria* como la solución a un problema con valor inicial fraccionario de la forma

$$\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = a^{\nu} x(t), \quad \mathbf{D}^{\nu-k-1}\, x(t)\Big|_{t=0} = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

para el caso de Riemann-Liouville, y

$$\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = a^{\nu} x(t), \quad x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

para el caso de Caputo. Aquí, supondremos que $a > 0$ y que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ son constantes dadas.

4.3.1. Exponencial fraccionaria de Riemann

Partiremos de la ecuación diferencial fraccionaria

$$\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = a^{\nu} x(t)$$

y con las condiciones iniciales

$$\mathbf{D}^{\nu-k-1}\, x(t)|_{t=0} = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aplicando la transformada de Laplace, suponiendo que tiene una solución, llegamos a

$$s^{\nu}\hat{x}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k x_k = a^{\nu}\hat{x}(s),$$

por lo que al despejar y tomando $s > a$

$$\hat{x}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k x_k}{s^\nu - a^\nu}.$$

Trabajando cada uno de los términos de la suma, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{s^k x_k}{s^\nu - a^\nu} &= \frac{x_k}{s^{\nu-k}\left[1-(a/s)^\nu\right)]} \\
&= \frac{x_k}{s^{\nu-k}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^{j\nu} \\
&= x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{s^{(j+1)\nu-k}}.
\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa y usando el hecho de que

$$\mathscr{L}\left\{t^{p-1}\right\} = \frac{\Gamma(p)}{s^p}, \quad p > 0,$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{s^{(j+1)\nu-k}}\right\} &= x_k \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{(j+1)\nu-k-1}}{\Gamma((j+1)\nu-k)} \\
&= x_k t^{\nu-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+\nu-k)} \\
&= x_k t^{\nu-k-1} E_{\nu,\nu-k}((at)^\nu),
\end{aligned}$$

una potencia fraccionaria por una función de Mittag-Leffler, por lo que la solución formal del problema con valor inicial fraccionario es

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^{\nu-k-1} E_{\nu,\nu-k}((at)^\nu).$$

Definimos entonces

$$\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} = t^{\nu-k-1} E_{\nu,\nu-k}\left((at)^\nu\right)$$

como la *función exponencial fraccionaria de Riemann*.

Ahora mostraremos que $x(t)$ sí satisface el problema con valor inicial fraccionario. Vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} &= \mathbf{D}^{\nu}\ t^{\nu-k-1}E_{\nu,\nu-k}((at)^{\nu}) \\
&= \mathbf{D}^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{(j+1)\nu-k-1}}{\Gamma((j+1)\nu-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma((j+1)\nu-k)}\ \mathbf{D}^{\nu}\ t^{(j+1)\nu-k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma((j+1)\nu-k)} \frac{\Gamma((j+1)\nu-k)t^{(j+1)\nu-k-1-\nu}}{\Gamma((j+1)\nu-k-\nu)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}t^{j\nu-k-1}}{\Gamma(j\nu-k)}.
\end{aligned}$$

Al tomar $j=0$ en la suma, el término $\Gamma(j\nu-k)=\Gamma(-k)$ toma un valor infinito puesto que k es no negativo, así que la suma se puede hacer desde $j=1$. Por lo que al reindexar, llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\nu}t^{j\nu-k-1}}{\Gamma(j\nu-k)} \\
&= a^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{(j+1)\nu-k-1}}{\Gamma((j+1)\nu-k)} \\
&= a^{\nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\,,
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{D}^{\nu}\ x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ \mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^{\nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} = a^{\nu}x(t).$$

Además, para comprobar que se cumplen las condiciones iniciales, vemos que para $m = 0, 1, \ldots, n-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\nu-m-1}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} &= \mathbf{D}^{\nu-m-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{(j+1)\nu-k-1}}{\Gamma((j+1)\nu-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma((j+1)\nu-k)} \frac{\Gamma((j+1)\nu-k)t^{(j+1)\nu-k-1-(\nu-m-1)}}{\Gamma((j+1)\nu-k-(\nu-m-1))} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}t^{j\nu-k+m}}{\Gamma(j\nu-k+m+1)} \\
&= \frac{t^{-k+m}}{\Gamma(-k+m+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\nu}t^{j\nu-k+m}}{\Gamma(j\nu-k+m+1)}.
\end{aligned}$$

Vemos que el primer término toma el valor de cero si $m < k$. Al evaluar en $t = 0$ todos los términos de la suma en los que $j > 0$ son cero pues $\nu - k + m > 0$, por lo que sólo nos interesa el caso en el que $j = 0$, llegando a

$$\mathbf{D}^{\nu-m-1}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\Big|_{t=0} = \frac{t^{-k+m}}{\Gamma(-k+m+1)}\Big|_{t=0}.$$

Tendremos tres casos, dependiendo de k y m:

- si $m > k$ la potencia es positiva y toda la expresión será cero.
- si $m = k$ nos queda $t^{-k+m}/\Gamma(-k+m+1) = 1$.
- si $m < k$ entonces $\Gamma(-k+m+1)$ tomará un valor infinito, y toda la expresión será cero.

Concluimos entonces que

$$\mathbf{D}^{\nu-m-1}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = k, \\ 0 & \text{si } m \neq k. \end{cases}$$

Por lo tanto, para todo $m = 0, 1, \ldots, n-1$ tenemos

$$\mathbf{D}^{\nu-m-1}\ x(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ \mathbf{D}^{\nu-m-1}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\Big|_{t=0} = x_m$$

y también se cumplen las condiciones iniciales. Hay que notar que no podemos garantizar que la solución es única, aunque se espera que sí[3].

[3] Apéndice B

Algunas propiedades de la exponencial de Riemann

Analizaremos algunas propiedades de la función exponencial de Riemann

- Al evaluar la función exponencial fraccionaria de Riemann en $t=0$ vemos que
$$\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)} t^{\nu(j+1)-k-1}\Bigg|_{t=0}.$$
Vemos que la sucesión de los exponentes de t, $\{\nu(j+1)-k-1\}$, con $j=0,1,\ldots$ es una sucesión creciente, por lo que si en $j=0$ se obtiene un término positivo entonces todos los exponentes serán positivos y la evaluación será cero. Por otro lado si en $j=0$ se obtiene un término igual a cero (el caso en el que $\nu-k=1$) entonces los siguientes términos serán positivos y la evaluación en $t=0$ tomará el valor de uno. Por último, si en $j=0$ se obtiene una potencia negativa entonces sin importar si los siguientes exponentes son positivos o negativos, al evaluar en $t=0$ se tendrá al menos un exponente negativo y en la evaluación en $t=0$ se obtendrá $\pm\infty$, dependiendo si nos aproximamos por la derecha o por la izquierda.

  Resumiendo, vemos que únicamente tiene importancia cuando $j=0$ y se obtiene que
$$\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<n-1, \\ 1 & \text{si } k=n-1 \text{ y } \nu=n \text{ y} \\ \pm\infty & \text{si } k=n-1 \text{ pero } \nu<n. \end{cases}$$
En el caso particular que $\nu=n$, es decir, que se esté haciendo una derivada entera se llega al valor de uno.

- Consideremos algunos casos particulares de la función exponencial fraccionaria. Si $\nu=1$, entonces
$$x(t) = x_0 E_{1,1}(at) = x_0 e^{at},$$
la función exponencial. Cuando $\nu=1/2$, se llega a que
$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{\pi t}} + x_0\sqrt{a}e^{at}\operatorname{erfc}(-\sqrt{at}).^{4}$$

[4] Apéndice C.

- La función exponencial fraccionaria nos sirve también para casos enteros, por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) = a^n x(t)$$

con las condiciones iniciales $x^{(k)}(0) = x_k$ donde $k = 0, 1 \ldots n-1$. No se necesita resolver este problema por medio del polinomio característico.

- Al calcular la derivada de orden entero de la función, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} &= \frac{d}{dt}t^{\nu-k-1}E_{\nu,\nu-k}((at)^{\nu}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\frac{d}{dt}t^{\nu(j+1)-k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(\nu(j+1)-k-1)}t^{\nu(j+1)-k-2} \\
&= t^{\nu-k-2}E_{\nu,\nu-k-1}((at)^{\nu}) \\
&= \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k+1}\,.
\end{aligned}$$

- Respecto a un reescalamiento, vemos que si $\alpha > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{a,\alpha t}_{\nu,k} &= (\alpha t)^{\nu-k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a\alpha t)^{\nu j}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)} \\
&= \alpha^{\nu-k-1}\left[t^{\nu-k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((\alpha a)t)^{\nu j}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\right] \\
&= \alpha^{\nu-k-1}\,\mathbf{E}^{\alpha a,t}_{\nu,k}\,.
\end{aligned}$$

- Sabemos que en general la propiedad de semigrupo no se cumple en las derivadas de orden fraccionario, pero si tenemos un conjunto de coeficientes $\mu_i > 0$ y tal que $\sum \mu_i = 1$ entonces

$$\mathbf{D}^{\mu_1\nu}\,\mathbf{D}^{\mu_2\nu}\cdots\mathbf{D}^{\mu_n\nu}\,\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} = \mathbf{D}^{\nu}\,\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} = a^{\nu}\,\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\,.$$

Para demostrar esta propiedad, vemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}^{\mu_1 \nu}\ \mathbf{D}^{\mu_2 \nu} \dots \mathbf{D}^{\mu_n \nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu}\ \mathbf{D}^{\mu_1 \nu}\ \mathbf{D}^{\mu_2 \nu} \dots \mathbf{D}^{\mu_n \nu}\ \frac{t^{\nu(j+1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu}\ \mathbf{D}^{\mu_1 \nu}\ \mathbf{D}^{\mu_2 \nu} \dots \mathbf{D}^{\mu_{n-1} \nu}\ \frac{t^{\nu(j+1-\mu_n)-k-1}}{\Gamma(\nu(j+1-\mu_n)-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu}\ \mathbf{D}^{\mu_1 \nu}\ \mathbf{D}^{\mu_2 \nu} \dots \mathbf{D}^{\mu_{n-2} \nu}\ \frac{t^{\nu(j+1-(\mu_n+\mu_{n-1}))-k-1}}{\Gamma(\nu(j+1-(\mu_n+\mu_{n-1}))-k)},
\end{aligned}$$

y siguiendo este proceso, llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}^{\mu_1 \nu}\ \mathbf{D}^{\mu_2 \nu} \dots \mathbf{D}^{\mu_n \nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{\nu(j+1-(\mu_n+\mu_{n-1}+\ldots+\mu_1))-k-1}}{\Gamma(\nu(j+1-(\mu_n+\mu_{n-1}+\ldots+\mu_1))-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{\nu j-k-1}}{\Gamma(\nu j-k)} \\
&= a^{\nu}\left[t^{\nu-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^{j\nu}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\right] \\
&= \mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\,.
\end{aligned}$$

4.3.2. Exponencial fraccionaria de Caputo

Para la derivada de Caputo, tenemos la ecuación diferencial

$$^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ x(t) = a^{\nu} x(t),$$

con las condiciones iniciales

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1 \ldots n-1.$$

Aplicando la transformada de Laplace de ambos lados, llegamos a

$$s^{\nu}\hat{x}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} x_k = a^{\nu}\hat{x}(s),$$

por lo que al despejar llegamos a

$$\begin{aligned}
\hat{x}(s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\nu-k-1}x_k}{s^\nu - a^\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{s^{k+1}} \frac{1}{1-(a/s)^\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{s^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^{j\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{s^{j\nu+k+1}}.
\end{aligned}$$

Al calcular la transformada inversa, llegamos a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{j\nu+k}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k E_{\nu,k+1}((at)^\nu).
\end{aligned}$$

Definimos la función

$$ {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} = t^k E_{\nu,k+1}((at)^\nu), $$

que llamaremos la *función exponencial fraccionaria de Caputo*. Comprobamos al tomar la derivada de Caputo de orden ν que

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} &= {}^{C}\mathbf{D}^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} a^{j\nu} \frac{t^{j\nu+k}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)}\ {}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ t^{j\nu+k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\ \frac{d^n}{dt^n} t^{j\nu+k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\ \frac{\Gamma(j\nu+k+1)t^{j\nu+k-n}}{\Gamma(j\nu+k-n+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k-n+1)}\ \mathbf{D}^{-(n-\nu)}\ t^{j\nu+k-n}.
\end{aligned}$$

Vemos que cuando $j=0$ dentro de la suma, el denominador será infinito, por lo que

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k-n+1)} \frac{\Gamma(j\nu+k-n+1)t^{j\nu+k-n+n-\nu}}{\Gamma(j\nu+k-n+n-\nu+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{j\nu} t^{(j-1)\nu+k}}{\Gamma((j-1)\nu+k+1)} \\
&= a^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu} t^{j\nu+k}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \\
&= a^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t}
\end{aligned}$$

de donde

$$ {}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ {}^{C}\mathbf{D}^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^{\nu}\ {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} = a^{\nu} x(t). $$

Concluimos que la función cumple la ecuación diferencial. Para comprobar que cumple las condiciones iniciales, vemos que para $m = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m} \, {}^{C}\mathbf{E}^{c,t}_{\nu,k}\Big|_{t=0} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \frac{d^m}{dt^m} t^{j\nu+k}\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \frac{\Gamma(j\nu+k+1)t^{j\nu+k-m}}{\Gamma(j\nu+k-m+1)}\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu} t^{j\nu+k-m}}{\Gamma(j\nu+k-m+1)}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{t^{k-m}}{\Gamma(k-m+1)}\Big|_{t=0},
\end{aligned}$$

pues cuando $j > 0$ el exponente de t será positivo y al evaluar será cero. Tenemos, al igual que con la exponencial fraccionaria de Riemann, tres casos dependiendo de la relación entre k y m. Podemos ver que si $k \neq m$, será cero ya sea por la función Γ o por la evaluación en cero, y si $k = m$ se llega a uno, de donde

$$\frac{d^m}{dt^m} \, {}^{C}\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k \neq m. \end{cases}$$

Por lo tanto, para todo $m = 0, 1, \ldots, n-1$ tenemos

$${}^{C}\mathbf{D}^{\nu-m-1} \, x(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \, {}^{C}\mathbf{D}^{\nu-m-1} \, {}^{C}\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}\Big|_{t=0} = x_m$$

y también se cumplen las condiciones iniciales. Como en el caso de Riemann, no se puede asegurar que la solución obtenida aquí es única.

Algunas propiedades de la exponencial de Caputo

- Al evaluar la función en $t = 0$ se llega a

  $${}^{C}\mathbf{E}^{a,0}_{\nu,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu} t^{j\nu+k}}{\Gamma(j\nu+k+1)}\Big|_{t=0} = \frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\Big|_{t=0},$$

  pues las potencias son siempre positivas si $j > 0$. Concluimos que al evaluar

  $${}^{C}\mathbf{E}^{a,0}_{\nu,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0, \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

- La función exponencial de Caputo también cumple que si $\nu = 1$ se llega a la función exponencial usual, y de hecho, en el caso en el que $\nu = n$, un número entero, entonces

  $$ {}^{C}\mathbf{E}_{n,n-k-1}^{a,t} = \mathbf{E}_{n,k}^{a,t}, $$

  la función exponencial de Riemann.

- Si calculamos la derivada entera de la exponencial fraccionaria de Caputo, vemos que

  $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,{}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t} &= \frac{d}{dt} t^{k} E_{\nu,k+1}((at)^{\nu}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)} \frac{d}{dt} t^{j\nu+k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k)} t^{j\nu+k-1} \\ &= t^{k-1} E_{\nu,k}((at)^{\nu}) \\ &= {}^{C}\mathbf{E}_{\nu,k-1}^{a,t}. \end{aligned}$$

  Como un detalle curioso podemos ver que la relación recursiva que obtenemos en la función exponencial de Caputo es igual a la de la exponencial de Riemann pero en sentido opuesto.

4.4. Funciones trigonométricas fraccionarias

Una propiedad que resultaría interesante es comprobar si, al igual que con la función exponencial, al evaluarla en un número imaginario puro ia, con $a > 0$, y el negativo de ese número $-ia$, se llega (agrupando términos y combinando las dos funciones) a un seno y coseno fraccionarios que cumplan que

$$\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) = -a^{2\nu} x(t).$$

Basándonos en esta idea se pueden hacer dos distintos análisis dado que la propiedad de semigrupo no aplica en derivadas fraccionarias. La primera de ellas es ver si la función

$$x(t) = \frac{\mathbf{E}_{\nu,k}^{ia,t} + \mathbf{E}_{\nu,k}^{-ia,t}}{2}$$

cumple que

$$\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) = -a^{2\nu} x(t).$$

Al hacer el cálculo directo, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ia)^{j\nu}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\, \mathbf{D}^{2\nu}\, t^{\nu(j+1)-k-1} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ia)^{j\nu}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\, \mathbf{D}^{2\nu}\, t^{\nu(j+1)-k-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ia)^{j\nu} t^{\nu(j-1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j-1)-k)}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ia)^{j\nu} t^{\nu(j-1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j-1)-k)}\right].
\end{aligned}$$

Podemos separar el caso cuando $j = 1$ que por la función Γ la expresión se va a cero, por lo que, al separar también el caso en que $j = 0$ y reindexar los términos llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) &= \frac{t^{-\nu-k-1}}{\Gamma(-\nu-k)} + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(ia)^{j\nu} t^{\nu(j-1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j-1)-k)} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-ia)^{j\nu} t^{\nu(j-1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j-1)-k)}\right] \\
&= \frac{t^{-\nu-k-1}}{\Gamma(-\nu-k)} + \frac{a^{2\nu}}{2}\left[i^{2\nu}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ia)^{j\nu} t^{\nu(j+1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\right. \\
&\quad \left. +(-i)^{2\nu}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ia)^{j\nu} t^{\nu(j+1)-k-1}}{\Gamma(\nu(j+1)-k)}\right].
\end{aligned}$$

Concluimos que $x(t)$ cumple la propiedad que buscamos sólo cuando ν es un número entero y así el término $t^{-\nu-k-1}/\Gamma(-\nu-k)$ desaparece y los factores $i^{2\nu}$ y $(-i)^{2\nu}$ forman el signo negativo que buscamos.

Por otro lado, si aplicamos dos veces la derivada de orden ν a la función $x(t)$

vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{D}^{\nu}\ x(t) &= \mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{D}^{\nu}\ (\mathbf{E}_{\nu,k}^{ia,t} + \mathbf{E}_{\nu,k}^{-ia,t})/2 \\
&= \frac{(ia)^{2\nu}}{2}\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{ia,t} + \frac{(-ia)^{2\nu}}{2}\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{-ia,t} \\
&= a^{2\nu}\left[\cos(\nu\pi)\left(\frac{\mathbf{E}_{\nu,k}^{ia,t} + \mathbf{E}_{\nu,k}^{-ia,t}}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left. +i\,\mathrm{sen}(\nu\pi)\left(\frac{\mathbf{E}_{\nu,k}^{ia,t} - \mathbf{E}_{\nu,k}^{-ia,t}}{2}\right)\right] \\
&= a^{2\nu}\left[\cos(\nu\pi)x(t) + i\,\mathrm{sen}(\nu\pi)\left(\frac{\mathbf{E}_{\nu,k}^{ia,t} - \mathbf{E}_{\nu,k}^{-ia,t}}{2}\right)\right],
\end{aligned}$$

y por lo tanto, se cumple la ecuación diferencial únicamente cuando ν es entero e impar (que en el caso de $\nu = 1$ son las funciones seno y coseno), por lo que la función exponencial fraccionaria de Riemann no funciona para generalizar las funciones trigonométricas pues, sin importar si se hace la derivada por pasos o en una sola operación, se obtienen potencias fraccionarias de un número imaginario.

4.4.1. Función trigonométrica de Riemann

El hecho de que la función exponencial fraccionaria de Riemann no funcione para generalizar otras funciones deja abiertas las ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{D}^{\nu}\ x(t) = -a^{2\nu}x(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{D}^{2\nu}\ x(t) = -a^{2\nu}x(t),$$

que en el caso en el que $\nu = 1$ es satisfecha por las funciones seno y coseno.

Para resolver la segunda ecuación, tomando $n-1 < 2\nu \leq n$ e imponiendo como condiciones iniciales $\mathbf{D}^{2\nu-k-1}\ x(t)\big|_{t=0} = x_k$, con $k = 0, 1 \ldots n-1$, llegamos a

$$s^{2\nu}\hat{x}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k x_k = -a^{2\nu}\hat{x}(s).$$

Despejando la transformada de $x(t)$ se llega a

$$\begin{aligned}
\hat{x}(s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k x_k}{s^{2\nu} + a^{2\nu}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{s^{2\nu-k}[1+(a/s)^{2\nu}]} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{s^{2\nu-k}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{a}{s}\right)^{2\nu j} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a^{2\nu j}}{s^{2\nu(j+1)-k}}.
\end{aligned}$$

Al tomar la transformada de Laplace inversa, vemos que una posible solución de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a^{2\nu j} \frac{t^{2\nu(j+1)-k-1}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^{2\nu-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (at)^{2\nu j}}{\Gamma(2\nu j + 2\nu - k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^{2\nu-k-1} E_{2\nu,2\nu-k}\left(-(at)^{2\nu}\right).
\end{aligned}$$

Entonces definimos la funcion

$$\mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) = t^{2\nu-k-1} E_{2\nu,2\nu-k}\left(-(at)^{2\nu}\right)$$

como la *función trigonométrica de Riemann* y vemos que cumple la ecuación diferencial como sigue.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{2\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a^{2\nu j}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)}\ \mathbf{D}^{2\nu}\ t^{2\nu(j+1)-k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a^{2\nu j}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)} \frac{\Gamma(2\nu(j+1)-k) t^{2\nu(j+1)-k-1-2\nu}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k-2\nu)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a^{2\nu j} t^{2\nu j-k-1}}{\Gamma(2\nu j - k)}.
\end{aligned}$$

Vemos que la suma se puede hacer desde $j = 1$ pues el denominador se va a infinito. Al reindexar los términos llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{2\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^{2\nu j} t^{2\nu j-k-1}}{\Gamma(2\nu j-k)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} a^{2\nu(j+1)} t^{2\nu(j+1)-k-1}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)} \\
&= -a^{2\nu} t^{2\nu-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (at)^{2\nu j}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)} \\
&= -a^{2\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t)\ .
\end{aligned}$$

De la misma manera podemos comprobar que cumple las condiciones iniciales, pues se llega a que

$$\mathbf{D}^{2\nu-j-1}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,0) = \delta_{j,k},$$

y al sumar todas las distintas funciones, podemos expresar la solución como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t)\ .$$

Es interesante notar que la única diferencia entre la función exponencial fraccionaria y las funciones trigonométricas fraccionarias es (además del orden de la derivada 2ν) el signo negativo dentro de la función Mittag-Leffler.

Algunas propiedades interesantes de las funciones trigonométricas de Riemann es que en el caso en el que $\nu = 1/2$, se llega a

$$x(t) = x_0\ \mathbf{T}_{1/2,0}(a,t) = x_0 E_{1,1}\left(-(at)\right) = x_0 e^{-at},$$

y como es de esperarse, en el caso en el que $\nu = 1$ la función es

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0\ \mathbf{T}_{1,0}(a,t) + x_1\ \mathbf{T}_{1,1}(a,t) \\
&= x_0 t E_{2,2}\left(-(at)^2\right) + x_1 E_{2,1}\left(-(at)^2\right) \\
&= x_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a^{2j}}{\Gamma(2j+2)} t^{2j+1} + x_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a^{2j}}{\Gamma(2j+1)} t^{2j} \\
&= \frac{x_0}{a} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^{2j+1}}{(2j+1)!} + x_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^{2j}}{2j!} \\
&= \frac{x_0}{a} \operatorname{sen}(at) + x_1 \cos(at).
\end{aligned}$$

Otra propiedad de la función trigonométrica de Riemann, al igual que la exponencial, es que si tenemos un conjunto de índices $\mu_i > 0$ y tal que $\sum \mu_i = 2$ entonces se cumple que

$$\mathbf{D}^{\mu_1 \nu}\ \mathbf{D}^{\mu_2 \nu} \cdots \mathbf{D}^{\mu_n \nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) = \mathbf{D}^{2\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) = -a^{2\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t)\,.$$

La demostración es muy similar a la que se hizo para la función exponencial de Riemann, al reducir el orden de la derivada. Esta propiedad nos sirve para probar que la función trigonométrica de Riemann también cumple la ecuación diferencial

$$\mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) = -a^{2\nu}\ \mathbf{T}_{\nu,k}(a,t)\,.$$

4.4.2. Función trigonométrica de Caputo

Al evaluar la exponencial fraccionaria de Caputo en algún número complejo y seguir el mismo argumento que con la exponencial de Riemann, no llegaremos a una función que cumpla la ecuación diferencial

$${}^{C}\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) = -a^{2\nu} x(t).$$

Tomando $n-1 < 2\nu \leq n$ y partiendo de la ecuación diferencial

$${}^{C}\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) = -a^{2\nu} x(t),$$

buscaremos definir una función trigonométrica de Caputo que cumpla la ecuación diferencial y las condiciones iniciales $x^{(k)}(0) = x_k$ con $k = 0, 1 \ldots n-1$. Al aplicar la transformada de Laplace, se llega a que

$$s^{2\nu}\hat{x}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{2\nu-k-1} x_k = -a^{2\nu}\hat{x}(s),$$

por lo que al despejar y calcular la transformada inversa, se llega a que una posible solución de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^{2\nu-k-1}x_k}{s^{2\nu}+a^{2\nu}}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}x_k\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{a}{s}\right)^{2\nu j}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}x_k\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a^{2\nu j}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)^{2\nu j+k+1}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}x_k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j a^{2\nu j}t^{2\nu j+k}}{\Gamma(2\nu j+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}x_k t^k E_{2\nu,k+1}\left(-(at)^{2\nu}\right).
\end{aligned}$$

Definimos entonces la *función trigonométrica de Caputo* como

$${}^{C}\mathbf{T}_{\nu,k}(a,t) = t^k E_{2\nu,k+1}\left(-(at)^{2\nu}\right),$$

y vemos que podemos escribir la solución a la ecuación diferencial como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1}x_k\,{}^{C}\mathbf{T}_{\nu,k}(a,t)\,.$$

Algunas propiedades interesantes de la función trigonométrica de Caputo es que al igual que la de Riemann, en el caso en que $\nu = 1/2$ se llega a que $x(t) = x_0e^{-at}$ y cuando $\nu = 1$ se llega al seno y coseno usual.

Capítulo 5

Sistemas de ecuaciones diferenciales

5.1. Motivación

Cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden entero, sabemos que si partimos del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

donde A es una matriz real y constante y $x(t)$ es una función vectorial, entonces la solución se encuentra a partir de la *matriz exponencial* e^{tA}, la cual la definimos de tal manera que al evaluar en $t = 0$ se obtenga la identidad, y al derivar esa función se obtenga

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Gracias a esa propiedad de la matriz exponencial, sabemos que la solución a la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax,$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$ es

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

pues vemos que cumple la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

Además, una ecuación diferencial homogénea de orden n y con coeficientes constantes de la forma

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 y(t) + \alpha_1 y'(t) + \ldots + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t)$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \ddots & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Es importante notar que al pasar de una ecuación homogénea de orden n a un sistema de ecuaciones, utilizamos implícitamente la propiedad de semigrupo de las derivadas de orden entero. Para desarrollar una idea similar en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario tendremos que imponer a la solución o comprobar de la solución que obtengamos que cumple la propiedad de semigrupo.

5.2. Potencias fraccionarias de una matriz

En muchos ejemplos y aplicaciones del cálculo fraccionario, nos encontramos con potencias fraccionarias de una matriz. En el caso de matrices diagonalizables, definimos

$$A^\nu = PD^\nu P^{-1},$$

la cual vemos que es una matriz con entradas reales si los eigenvalores de A son positivos. En el caso de matrices no diagonalizables, vemos que

$$A^\nu = PJ^\nu P^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1^\nu & & & \\ & J_2^\nu & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l^\nu \end{pmatrix} P^{-1},$$

en donde la potencia fraccionaria, definida en cada uno de los bloques de Jordan, queda como

$$\begin{aligned} J_i^\nu &= \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}^\nu \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_i)^\nu & \nu(\lambda_i)^{\nu-1} & \frac{\nu(\nu-1)}{2}(\lambda_i)^{\nu-2} & \dots & \binom{\nu}{j}(\lambda_i)^{\nu-j} \\ 0 & (\lambda_i)^\nu & \nu(\lambda_i)^{\nu-1} & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & \nu(\lambda_i)^{\nu-1} \\ 0 & 0 & & \dots & (\lambda_i)^\nu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la cual existe siempre y cuando los eigenvalores λ_i sean distintos de cero, y de hecho, es una matriz con entradas reales si los eigenvalores son positivos.

Podemos definir, si la matriz A es invertible, potencias fraccionarias negativas como $A^{-\nu} = \left(A^{-1}\right)^{\nu}$, es decir, primero invertir la matriz y luego calcular la potencia fraccionaria. Se cumple además que si los eigenvalores son positivos, entonces A^{ν} y $A^{1-\nu}$ existen y $A^{\nu}A^{1-\nu} = A$. Demostrar esa propiedad se logra gracias a la conmutatividad de las funciones matriciales.[1]

5.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

Buscaremos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionario de la forma

$$\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = A^{\nu} x(t).$$

Veremos si la solución tiene alguna relación con la matriz exponencial, la cual sabemos que es parte de la solución en el caso $\nu = 1$.

Al igual que lo hicimos para funciones de una sola variable, en que a partir de una ecuación diferencial fraccionaria definimos la función exponencial fraccionaria $\mathbf{E}^{a,t}_{\nu,k}$, partiremos de un sistema de ecuaciones homogéneo para definir la matriz exponencial fraccionaria como la solución a algún sistema de ecuaciones diferenciales fraccionario.

5.3.1. Matriz exponencial de Riemann

Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = A^{\nu} x(t),$$

considerando las condiciones iniciales $\mathbf{D}^{\nu-k}\, x(t)|_{t=0} = x_k$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Notemos que aquí, x_k es un vector. Aplicando la transformada de Laplace, llegamos a la expresión

$$\mathscr{L}\left\{\mathbf{D}^{\nu}\, x(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{A^{\nu} x(t)\right\},$$

[1]Se puede demostrar que si dos funciones son analíticas entonces al evaluarlas en una matriz conmutan.

y como vimos anteriormente, al calcular la transformada de Laplace de la derivada de la expresión a la izquierda de la ecuación, llegamos a que:

$$s^{\nu}\hat{x}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k x_k = A^{\nu}\hat{x}(s),$$

por lo que, al despejar la transformada de x, llegamos a que

$$s^{\nu}\left[I - \left(\frac{1}{s}A\right)^{\nu}\right]\hat{x}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k x_k.$$

Sabemos, gracias al lema de perturbación de Banach, que para s suficientemente grande, la matriz $I-(1/s)^{\nu}A^{\nu}$ es invertible y además

$$\left[I - \left(\frac{1}{s}A\right)^{\nu}\right]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}A\right)^{j\nu},$$

de donde

$$s^{\nu}\hat{x}(s) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}A\right)^{j\nu}\left(\sum_{k=0}^{n-1} s^k x_k\right),$$

por lo que al calcular la transformada inversa, llegamos a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^k}{s^{\nu}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}A\right)^{j\nu} x_k\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)^{(j+1)\nu-k}\right\}A^{j\nu}x_k\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{(j+1)\nu-k-1}}{\Gamma((j+1)\nu-k)}A^{j\nu}x_k\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^{\nu-k-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(tA)^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+\nu-k)}x_k\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^{\nu-k-1}E_{\nu,\nu-k}((tA)^{\nu})x_k,
\end{aligned}$$

donde

$$E_{\alpha,\beta}(tA) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

es la función Mittag-Leffler definida para matrices.

Definimos entonces la función

$$\mathbf{E}_{\nu,k}^{A,t} = t^{\nu-k-1} E_{\nu,\nu-k}((tA)^{\nu})$$

como la *matriz exponencial de Riemann*, y al igual que lo hicimos con la función exponencial fraccionaria de Riemann, podemos comprobar que cumple la ecuación diferencial y que

$$_0\mathbf{D}_t^{\nu-r-1}\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{A,t}\Big|_{t=0} = \begin{cases} I & \text{si } r=k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Expresamos la solución a la ecuación diferencial como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\nu,k}^{A,t}\, x_k,$$

la cual también cumple que si $\nu = 1$ la solución es la matriz exponencial usual.

Gracias a este estudio también hemos resuelto el sistema de ecuaciones de orden n

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) = A^n x(t)$$

con las condiciones iniciales determinadas.

La función exponencial de Riemann cumple las mismas propiedades que la funcion escalar y lograr la demostración se logra al seguir el mismo proceso, tratando la matriz A como la constante a de la función escalar. La propiedad que resulta sobresaliente es que sobre un conjunto de coeficientes $\mu_i > 0$ que cumpla que $\sum \mu_i = \nu$ se cumple que

$$\mathbf{D}^{\mu_1}\ \mathbf{D}^{\mu_2} \cdots \mathbf{D}^{\mu_n}\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{A,t} = \mathbf{D}^{\nu}\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{A,t} = A^{\nu}\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{A,t}\,.$$

5.3.2. Matriz exponencial de Caputo

Por otro lado, para la derivada de Caputo, tenemos la ecuación diferencial

$$^C\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = A^{\nu} x(t),$$

con $x^{(k)}(0) = x_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Aplicando la misma idea de la transformada de Laplace, llegamos a

$$s^{\nu}\left[I - \left(\frac{1}{s}A\right)^{\nu}\right]\hat{x}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} x_k,$$

por lo que una solución a la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{s}A\right)^{j\nu}x_k\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)^{j\nu+k+1}\right\}A^{j\nu}x_k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\nu+k}}{\Gamma(j\nu+k+1)}A^{j\nu}x_k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}t^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(tA)^{j\nu}}{\Gamma(j\nu+k+1)}x_k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}t^k E_{\nu,k+1}((tA)^{\nu})x_k
\end{aligned}$$

de nuevo, con la función Mittag-Leffler definida para matrices. De esta manera definimos la función

$$^{C}\mathbf{E}^{A,t}_{\nu,k} = t^k E_{\nu,k+1}((tA)^{\nu})$$

como la *matriz exponencial de Caputo*, la cual podemos comprobar que cumple la ecuación diferencial y las condiciones iniciales si manipulamos la matriz A de la misma manera en que trabajamos la constante a en el caso de la exponencial fraccionaria de Caputo. Expresamos entonces la solución a la ecuación diferencial como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} {^{C}\mathbf{E}^{A,t}_{\nu,k}}\, x_k.$$

5.3.3. Matrices trigonométricas fraccionarias

Como vimos anteriormente, las funciones exponenciales de Riemann y Caputo no funcionan para generalizar las funciones trigonométricas. Generalizar las funciones trigonométricas fraccionarias en el caso de matrices tiene un proceso similar al que seguimos con las funciones trigonométricas fraccionarias escalares.

Para el caso de la la derivada de Riemann y partiendo de la ecuación diferencial

$$\mathbf{D}^{2\nu}\, x(t) = -A^{2\nu}x(t),$$

con las condiciones iniciales $\mathbf{D}^{2\nu-k}\,x(t)\big|_{t=0} = x_k$ con $k = 0,1\ldots n-1$, al aplicar la transformada de Laplace y despejar, se llega a que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{s^{2\nu-k}}\left[I+\left(\frac{1}{s}A\right)^{2\nu}\right]^{-1}x_k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2\nu-k}}\left(\frac{1}{s}A\right)^{2\nu j}\right\}x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)^{2\nu(j+1)-k}\right\}A^{2\nu j}x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{t^{2\nu(j+1)-k-1}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)}A^{2\nu j}x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}t^{2\nu-k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(tA)^{2\nu j}}{\Gamma(2\nu(j+1)-k)}x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}t^{2\nu-k-1}E_{2\nu,2\nu-k}(-(tA)^{2\nu})x_k.
\end{aligned}$$

Definimos con este proceso la función

$$\mathbf{T}_{\nu,k}(A,t) = t^{2\nu-k-1}E_{2\nu,2\nu-k}\left(-(tA)^{2\nu}\right),$$

la cual llamaremos la *matriz trigonométrica de Riemann*.

Es fácil comprobar que cumple la ecuación diferencial, así como el hecho de que

$$\mathbf{D}^{2\nu-j}\;\mathbf{T}_{\nu,k}(A,t) = \delta_{k,j},$$

por lo que podemos expresar la solución a la ecuación diferencial como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{T}_{\nu,k}(A,t)\,x_k.$$

Por otro lado, para llegar a la función trigonométrica de Caputo, partimos de

$${}^{C}\mathbf{D}^{2\nu}\,x(t) = -A^{2\nu}x(t),$$

con las condiciones iniciales $x^{(k)}(0) = x_k$ con $k = 0, 1 \ldots n-1$ y de la misma manera, aplicando la transformada de Laplace, llegamos a que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} s^{2\nu-k-1}\left[I+\left(\frac{1}{s}A\right)^{2\nu}\right]^{-1} x_k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{s}A\right)^{2\nu j}\right\} x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j t^{2\nu j+k}}{\Gamma(2\nu j+k+1)} A^{2\nu j} x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{2\nu,k+1}\left(-(tA)^{2\nu}\right) x_k.
\end{aligned}$$

Definimos la función

$$^{c}\mathbf{T}_{\nu,k}(A,t) = t^k E_{2\nu,k+1}\left(-(tA)^{2\nu}\right)$$

como la *matriz trigonométrica de Caputo*; y es fácil comprobar que cumple la ecuación diferencial así como las condiciones de frontera.

Como una propiedad interesante de ambas funciones trigonométricas es que cuando $\nu = 1/2$ se llega a e^{-tA} y cuando $\nu = 1$ se resuelven ambas ecuaciones diferenciales con el seno y coseno de la matriz A.

Apéndice A

Operador de Weyl

Las terminales de la integral juegan un papel fundamental en el cálculo generalizado y una de las integrales más usuales es cuando la terminal inferior toma el valor de menos infinito, y es llamada la *integral de Liouville*. Como es de esperarse es un poco más restrictiva pues necesita ser convergente la integral, esto implicará que sólo podemos garantizar la existencia de la intergal de Liouville si la función es de orden $O(t^{-n})$ cuando $t \to -\infty$. Esa puede ser una restricción un tanto fuerte, y en algunas aplicaciones se tienen funciones que decaen rápidamente para valores grandes de t, por lo cual se define un operador que tiene una interpretación similar a la integral de Riemann-Liouville, llamada la *integral de Weyl*. Este operador, denotado por $W_t^{-\nu} f(t)$, lo definimos como:

$$W_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_t^{\infty} (\tau - t)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Utilizando la notación de la integral de Riemann-Liouville podemos expresar que

$$\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\nu} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\nu)} \int_{\infty}^{-t} (t+s)^{\nu-1} f(-s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-t}^{\infty} (t+s)^{\nu-1} f(-s)\, ds \\
&= W_{-t}^{-\nu} f(-t)
\end{aligned}$$

por lo que el operador de Weyl es también una integral de Riemann-Liouville y por lo tanto, hereda las propiedades de la integral de Riemann, es decir, es un operador continuo en el orden, lineal y que cumple la propiedad de semigrupo y conmutatividad.

Como ejemplo de la integral de Liouville calcularemos ${}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\nu}\, t^m e^{ct}$ con $c > 0$ y $m = 0, 1, \ldots$

$$ {}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\nu}\, t^m e^{ct} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\nu-1} \tau^m e^{c\tau}\, d\tau $$

y haciendo la transformación $s = c(t-\tau)$ llegamos a que

$$ \begin{aligned} {}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\nu}\, t^m e^{ct} &= \frac{1}{c\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \left(\frac{s}{c}\right)^{\nu-1} \left(t - \frac{s}{c}\right)^m e^{ct-s} ds \\ &= \frac{e^{ct}}{c^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^\infty s^{\nu-1} \left(t - \frac{s}{c}\right)^m e^{-s} ds \\ &= \frac{e^{ct}}{c^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^\infty s^{\nu-1} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k t^{m-k} \left(\frac{s}{c}\right)^k\right] e^{-s} ds \\ &= \frac{e^{ct}}{c^\nu \Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k t^{m-k} \frac{1}{c^k} \int_0^\infty s^{\nu-1+k} e^{-s} ds \\ &= \frac{e^{ct}}{c^\nu \Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^k t^{m-k} \Gamma(\nu+k)}{c^k}, \end{aligned} $$

y por ejemplo, para $m = 0$ llegamos a que

$$ {}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, e^{ct} = \frac{e^{ct}}{c^\nu}. $$

Además, como vimos $W_t^{-\nu} f(-t) = {}_{-\infty}\mathbf{D}_{-t}^{-\nu}\, f(t)$ por lo que

$$ W_t^{\nu} e^{-ct} = \frac{e^{-ct}}{c^\nu}. $$

En general y para evitar tener dos definiciones equivalentes, si alguna de las dos terminales de la integral son infinitas diremos que es una integral de Weyl.

Al igual que la derivada de Riemann-Liouville por la izquierda, se define la *derivada de Weyl*, la cual designaremos por

$$ W_t^{\nu} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[W_t^{-(n-\nu)} f(t) \right]. $$

Vemos, de nuevo, que la definición de derivada de orden fraccionario consiste en aplicar la derivada de orden entero a la integral de orden fraccionario. Al igual que en la integral de Weyl, si alguna de las dos terminales de la derivada son infinitas, diremos que es una derivada de Weyl.

Una de las propiedades particulares de la derivada de Weyl es que se puede expresar como una integral de la forma

$$W_t^{\nu} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\int_t^{\infty}(\tau-t)^{n-\nu-1}f(\tau)\,d\tau\right],$$

y haciendo un cambio variable $s=\tau-t$, llegamos a

$$\begin{aligned} W_t^{\nu} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\int_0^{\infty}s^{n-\nu-1}f(s+t)\,ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\left[\int_0^{\infty}s^{n-\nu-1}f(s+t)\,ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\int_0^{\infty}s^{n-\nu-1}f^{(n)}(s+t)\,ds. \end{aligned}$$

De esta expresión podemos deducir que $W_t^{\nu} f(t)=0$ si y sólo si $f^{(n)}(t)=0$, o si f es un polinomio de grado a lo más $n-1$, sin embargo, los polinomios no son integrables en el sentido de Weyl, por lo que concluimos que, si una función es de orden $O(x^{-n})$ y la integral de Weyl existe, entonces es distinta de cero. Además, una de las características que hace muy especial a la derivada de Weyl es que siempre —si la función es derivable en el sentido de Weyl— que

$$W_t^{\nu}\left[W_t^{\mu} f(t)\right] = W_t^{\nu+\mu} f(t)$$

para cualesquiera ν y μ sin importar su signo.

Demostrar esta propiedad si ν y μ son negativos lo hemos probado como la propiedad de semigrupo de las integrales de orden fraccionario. Si ν y μ son ambos positivos se cumple pues

$$\lim_{t\to\infty} f^{(k)}(t) = 0$$

para $k=0,1\ldots n$ para que la integral de Weyl exista. Por otro lado, si tenemos

$$W_t^{\nu}\left[W_t^{-\mu} f(t)\right] = \frac{d^n}{dt^n}W_t^{-(n-\nu)}\left[W_t^{-\mu} f(t)\right] = \frac{d^n}{dt^n}W_t^{-(n-\nu+\mu)} f(t)$$

pues esa propiedad se cumple para la integral de orden fraccionario.

Nos hace falta probar que

$$W_t^{-\nu}\left[W_t^{\mu} f(t)\right] = W_t^{-\nu+\mu} f(t),$$

para ello expresamos

$$W_t^{-\nu}\left[W_t^{\mu} f(t)\right] = W_t^{-\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m} W_t^{-(m-\mu)} f(t)\right]$$

y observamos que la propiedad que buscamos es

$$W_t^{-\nu} g^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left[W_t^{-\nu} g(t)\right].$$

Para demostrarla, vemos que

$$\begin{aligned}
W_t^{-\nu} g^{(m)}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\nu-1} g^{(m)}(\tau)\, d\tau \\
&= \left.\frac{(t-\tau)^{\nu-1} g^{(m-1)}(\tau)}{\Gamma(\nu)}\right|_{-\infty}^{\tau=t} + \frac{(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\nu-2} g^{(m-1)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\nu-2} g^{(m-1)}(\tau)\, d\tau \\
&= W_t^{-\nu+1} g^{(m-1)}(t).
\end{aligned}$$

Obtenemos una fórmula que recursivamente reduce el grado de la derivada. Dependiendo de ν y m se puede llegar a dos casos: hacer m veces el paso anterior y llegar a la propiedad deseada o hacer n veces el paso anterior y que se llegue a

$$W_t^{-\nu+n} g^{(m-n)}(t)$$

y usar la propiedad para derivadas. Concluimos que el operador de Weyl cumple que

$$W_t^{\nu}\left[W_t^{\mu} f(t)\right] = W_t^{\nu+\mu} f(t)$$

para cualesquiera ν y μ. Un detalle interesante que obtenemos gracias a esta propiedad es que la derivada de Weyl se puede definir como una derivada por la derecha (como la derivada de Caputo) y el resultado sería el mismo. Concluimos entonces que la derivada de Caputo y Riemann coinciden si alguna de las terminales es infinito.

Si como último ejemplo buscamos calcular ${}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, t^m e^{ct}$, con $c > 0$ y $m = 0, 1, \ldots$ es

$$
{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, t^m e^{ct} \;=\; \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-(n-\nu)}\, t^m e^{ct}\right],
$$

y como vimos anteriormente,

$$
{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\mu}\, t^m e^{ct} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^k \Gamma(\mu+k) t^{m-k} e^{ct}}{c^{\mu+k}\Gamma(\mu)}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, t^m e^{ct} &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k\Gamma(n-\nu+k)t^{m-k}e^{ct}}{c^{n-\nu+k}\Gamma(n-\nu)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k\Gamma(n-\nu+k)}{c^{n-\nu+k}\Gamma(n-\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{m-k}e^{ct}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k\Gamma(n-\nu+k)}{c^{n-\nu+k}\Gamma(n-\nu)}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(m-k)!}{(m-k-j)!}t^{m-k-j}c^{n-j}e^{ct}\right] \\
&= e^{ct}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{j}\frac{(-1)^k\Gamma(n-\nu+k)(m-k)!t^{m-k-j}c^{n-j}}{c^{n-\nu+k}\Gamma(n-\nu)(m-k-j)!} \\
&= e^{ct}\sum_{u=0}^{m}t^{m-u}c^{\nu-u}\sum_{k=0}^{u}\frac{(-1)^k m!(m-k)!n!\Gamma(n-\nu+k)}{k!(n-u+k)!(u-k)!(m-u)!\Gamma(n-\nu)}.
\end{aligned}
$$

Si definimos

$$
A(u,m,\nu) = \sum_{k=0}^{u}\frac{(-1)^k m!(m-k)!n!\Gamma(n-\nu+k)}{k!(n-u+k)!(u-k)!(m-u)!\Gamma(n-\nu)},
$$

donde $n = \lceil \nu \rceil$, podemos escribir la derivada como

$$
{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\mu}\, t^m e^{ct} = t^m c^{\nu} e^{ct}\sum_{u=0}^{m}(ct)^{-u}A(u,m,\nu).
$$

Escribir la solución de esta manera nos permite ver que, para $m = 0$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\mu}\, e^{ct} &= c^{\nu}e^{ct}A(0,0,\nu) \\
&= c^{\nu}e^{ct}\frac{n!\Gamma(n-\nu)}{n!\Gamma(n-\nu)} \\
&= c^{\nu}e^{ct},
\end{aligned}
$$

una idea más acorde al cálculo de orden entero. De hecho, es justamente por las terminales de la derivada que en nuestro primer acercamiento a la derivada de orden fraccionario, concluimos que

$$\mathbf{D}^{\nu}\, e^{ct} = c^{\nu} e^{ct}$$

y cuando lo hicimos a través de su serie de potencias llegamos a que

$$\mathbf{D}^{\nu}\, e^{ct} = \frac{1}{t^{\nu}} E_{1,1-\nu}(cx)$$

porque la primera tiene terminales $(-\infty, t)$ y la segunda tiene terminales $(0,t)$.

Usando esa derivada, y aplicándola a números complejos, vemos que

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, e^{(i\mu)t} &= {}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, [\cos(\mu t) + i\,\mathrm{sen}(\mu t)] \\ &= (i\mu)^{\nu} e^{i\mu t} \end{aligned}$$

en donde, además, podemos ver que al aplicar el logaritmo complejo en ambos lados

$$\begin{aligned} (i\mu)^{\nu} &= e^{\nu\left(\log(\mu) + i(\frac{\pi}{2})\right)} \\ &= \mu^{\nu}\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right] \\ &= \mu^{\nu} e^{\frac{i\nu\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Así, llegamos a que

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, [\cos(\mu t) + i\,\mathrm{sen}(\mu t)] &= \left(\mu^{\nu} e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\right) e^{i\mu t} \\ &= \mu^{\nu} e^{i(\mu t + \frac{\nu\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Aplicando la misma idea a la funcion $e^{-i\mu t}$, llegamos a que

$${}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, [\cos(\mu t) - i\,\mathrm{sen}(\mu t)] = \mu^{\nu} e^{-i(\mu t + \frac{\nu\pi}{2})}.$$

Llegamos con estas dos fórmulas a un sistema de ecuaciones, el cual al resolverlo llegamos a que

$${}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, \cos(\mu t) = \mu^{\nu} \frac{1}{2}\left[e^{i(\mu t + \frac{\nu\pi}{2})} + e^{-i(\mu t + \frac{\nu\pi}{2})}\right] = \mu^{\nu} \cos(\mu t + \frac{\nu\pi}{2}),$$

y por otro lado

$${}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{\nu}\, \mathrm{sen}(\mu t) = \mu^{\nu} \frac{1}{2i}\left[e^{i(\mu t + \frac{\nu\pi}{2})} - e^{-i(\mu t + \frac{\nu\pi}{2})}\right] = \mu^{\nu} \mathrm{sen}(\mu t + \frac{\nu\pi}{2}).$$

Apéndice B

Otras propiedades de las ecuaciones diferenciales fraccionarias

Una pregunta que resulta natural cuando se habla de las derivadas fraccionarias es cuándo las dos diferentes definiciones de derivada (Riemann-Liouville y Caputo) coinciden para una función derivable en ambos sentidos.

La pregunta se puede expresar como la ecuación diferencial

$$ {}_0\mathbf{D}_t^{\nu} f(t) = {}_0^C\mathbf{D}_t^{\nu} f(t). $$

Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados, llegamos a que

$$ s^{\nu}\hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \, {}_0\mathbf{D}_t^{\nu-k-1} f(t)\Big|_{t=0} = s^{\nu}\hat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{\nu-j-1} f^{(j)}(0) $$

por lo que

$$ \sum_{k=0}^{n-1} s^k \, {}_0\mathbf{D}_t^{\nu-k-1} f(t)\Big|_{t=0} = \sum_{j=0}^{n-1} s^{\nu-j-1} f^{(j)}(0). $$

Vemos que si ν es un número entero entonces al reindexar ambos lados comprobamos que ambas definiciones coinciden; por otro lado, si estamos haciendo una derivada fraccionaria, vemos que del lado izquiero un polinomio en s de exponentes enteros y del lado derecho potencias fraccionarias, de donde son iguales sólo si los coeficientes de todos los términos son cero.

Concluimos entonces que

$$ {}_0\mathbf{D}_t^{\nu} f(t) = {}_0^C\mathbf{D}_t^{\nu} f(t) $$

sólo si $f^{(k)}(0) = 0$ y ${}_0\mathbf{D}_t^{\nu-k-1}\, f(t)\big|_{t=0} = 0$ con $k = 0, 1 \ldots n-1$, es decir, potencias pequeñas son las que causan la diferencia entre las dos derivadas.

Ejemplos de funciones de esta clase son funciones analíticas de la forma

$$f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k t^k$$

o funciones definidas como una serie fraccionaria de la forma

$$f(t) = t^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k.$$

B.1. Existencia y unicidad

Al trabajar con ecuaciones diferenciales (ya sean enteras o fraccionarias) un punto crítico es poder establecer si esa ecuación tiene solución (y entonces aplicar algún método para resolverlas) y si es única. Demostraremos que una ecuación diferencial de orden ν, con $n-1 < \nu \leq n$ y con con algunas estructuras también tiene una única solución, gracias al siguiente teorema

Si $f(t)$ es integrable y es tal que

$$\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty,$$

entonces la ecuación diferencial

$${}_0\mathbf{D}_t^{\nu}\, y(t) = f(t)$$

junto con las condiciones iniciales $\left[{}_0\mathbf{D}_t^{\nu-k}\, f(t)\right]_{t=0} = f_k$, con $k = 1 \ldots n$, tiene una solución única en $C^n[0,T]$.

Para lograr la demostración, suponemos que $f(t) = 0$ para $t > T$, por lo que podemos calcular la transformada de Laplace de la función f.

Al calcular la transformada de la ecuación diferencial, suponiendo que la solución existe, llegamos a que

$$\mathscr{L}\left\{{}_0\mathbf{D}_t^{\nu}\, y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$$

$$s^{\nu}\hat{Y}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0\mathbf{D}_t^{\nu-k-1}\, y(x)\right] = \hat{f}(s)$$

de donde, al despejar, llegamos a

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{f}(s)+\sum_{k=0}^{n-1} f_k s^k}{s^\nu}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{f}(s)}{s^\nu}\right\}+\sum_{k=0}^{n-1} f_k \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\nu-k}}\right\} \\ &= f(t) * \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k t^{\nu-k-1}}{\Gamma(\nu-k)}. \end{aligned}$$

Podemos dividir la solución encontrada en dos partes:

$$y_P(t) = f(t) * \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)},$$

$$y_H(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k t^{\nu-k-1}}{\Gamma(\nu-k)}.$$

Vemos que la función $y_H(t)$ está en el kernel de ${}_0\mathbf{D}_t^\nu$ y que cumple todas las condiciones iniciales f_k, mientras que la parte

$$y_P(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\,d\tau = {}_0\mathbf{D}_t^{-\nu} f(t)$$

cumple condiciones iniciales igual a cero y la ecuación diferencial

$${}_0\mathbf{D}_t^\nu\, y_H(t) = {}_0\mathbf{D}_t^\nu \left({}_0\mathbf{D}_t^{-\nu} f(t)\right) = f(t),$$

por lo que la suma de ambas es una solución a la ecuación diferencial.

Para ver si la solución es única, consideremos que existe otra función $y_2(t)$ que también sea solución, entonces al restarlas obtendríamos una función $z(t) = y(t) - y_2(t)$, que cumple la ecuación diferencial homogénea y con condiciones iniciales

$${}_0\mathbf{D}_t^{\nu-k}\, z(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Utilizando la transformada de Laplace, llegamos a que

$$s^\nu \hat{Z}(s) = 0,$$

de donde $z(t) = 0$ casi donde sea, por lo que la solución, dentro de $C^n[0,T]$, es única.

B.1.1. Existencia y unicidad de la función fraccionaria

Si partimos del problema con valor inicial

$$\mathbf{D}^{\nu}\, x(t) = a^{\nu} x(t)$$

y con las condiciones iniciales

$$\mathbf{D}^{\nu-k-1}\, x(t)|_{t=0} = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

vimos que una solución es

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t}\ .$$

Hasta el momento no podemos garantizar si la solución es única, pero si vemos que

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t}\ dt < \infty,$$

para alguna $T > 0$ y aplicando el teorema de existencia y unicidad a la ecuación diferencial

$${}_0\mathbf{D}_t^{\nu}\, x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\ \mathbf{E}_{\nu,k}^{a,t}$$

con las condiciones iniciales determinadas, entonces podemos concluir que la solución existe (lo cual ya lo habíamos comprobado) y es única en $C^n\,[0,T]$.

Apéndice C

Funciones Especiales

- **Función gamma Γ**

  Se define la función como sigue:

  $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

  y cumple con las siguientes propiedades:

  1)
  $$\Gamma(1) = 1$$

  2)
  $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

  3) Si z es un número natural, entonces

  $$\Gamma(z+1) = z!$$

  4) Si z no es un número entero, entonces

  $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

- **Función beta B**

  Se define la función $B(a,b)$ con a y $b > -1$ como sigue:

  $$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

y cumple con las siguientes propiedades:

1)
$$B(a,b) = B(b,a)$$

2)
$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

- **Función Mittag-Leffler**

  Se define la función como sigue:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

  y cumple que:

$$E_1(cz) = e^{cz}$$

- **Función Mittag-Leffler de dos parámetros**

  Se define la función de la siguiente manera:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

  y cumple que:

  1)
$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$$

  2) si m es un número natural, entonces

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left(e^z - \sum_{j=0}^{m-2} \frac{z^j}{j!}\right)$$

- **Función error complementario**

  Se define la función como sigue:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Apéndice D

Tabla de derivadas fraccionarias

Algunas derivadas fraccionarias de funciones sobresalientes, dependiendo de las términales de integración:

$f(t)$	${}_0\mathbf{D}_t^{\nu}\, f(t)$	${}_0^C\mathbf{D}_t^{\nu}\, f(t)$
1	$\frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}$	0
t^n	$\frac{n!t^{n-\nu}}{\Gamma(n-\nu+1)}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } \nu > n \\ \frac{n!t^{n-\nu}}{\Gamma(n-\nu+1)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$
t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\nu}}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\nu+1}}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}$
e^{at}	$t^{-\nu}E_{1,1-\nu}(at)$	$a^n t^{n-\nu}E_{1,n-\nu+1}(at)$

Bibliografía

[1] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.

[2] *Lecture Notes in Mathematics Vol. 457*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[3] B. Ross, *Fractional calculus*, Mathematics magazine, vol. 50, mayo de 1977.

[4] W. Boyce y R. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa Wiley, 2005.

[5] K. S. Miller y B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, 1993.